О.В. Леонова, П.Г. Сорокина

МАТЕМАТИКА
(Линейная алгебра)

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Байкальский государственный университет

О.В. Леонова, П.Г. Сорокина

МАТЕМАТИКА
(Линейная алгебра)

Учебное пособие

Иркутск
Издательство БГУ
2019

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я7
Л47

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Байкальского государственного университета

Рецензенты канд. физ.-мат. наук, доц. С.В. Тимофеев
канд. физ.-мат. наук, доц. Е.В. Аксенюшкина

Леонова О.В.
Л47 Математика (Линейная алгебра) [Электронный ресурс]: учеб. пособие / О.В. Леонова, П.Г. Сорокина. – Иркутск: Изд-во БГУ, 2019. – 113 с. – Режим доступа: lib-catalog@bgu.ru.

В учебном пособии содержится теоретический материал, примеры решения задач, задачи для решения на семинаре и для самостоятельного решения. Излагаемый материал охватывает все разделы рабочей программы дисциплины «Математика (Линейная алгебра)» для студентов направления 38.05.01 Экономическая безопасность.

Предназначено для студентов очной и заочной форм обучения.

УДК 512.64(075.8)
ББК 22.143я7

Оглавление

1. Векторная алгебра

1.1. Понятие n-мерного вектора, действия с векторами

Вектором размерности n или n*-мерным вектором* называется любой упорядоченный набор из n чисел. Эти числа называются координатами или компонентами вектора: вектор $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

***Пример* 1.1.** $x=(2;5)$[1], $y=(-3;10)$ – это двумерные вектора, координаты которых соответственно равны $x_1=2$, $x_2=5$, $y_1=-3$, $y_2=-10$.

$z=(3;7;-11)$ – трехмерный вектор, координаты которого равны $z_1=3$; $z_2=7$; $z_3=-11$.

Совокупность всех векторов размерности n называется n-мерным векторным пространством R^n.

***Пример* 1.2.** $x \in R^2$, $y \in R^2$, $z \in R^3$ (по данным примера 1.1).

Координаты вектора можно расположить либо в строку

$$x=(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1.1}$$

либо в столбец

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Тогда (1.1) – это вектор-строка, (1,2) – это вектор-столбец.

Два n-мерных вектора x и y называются *равными*, если их соответствующие координаты равны: $x_1=y_1$, $x_2=y_2$, …, $x_n=y_n$.

Вектор, все координаты которого равны нулю, называется *нулевым* вектором $0=(0;0;...;0)$.

Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ – произвольные n-мерные векторы.

Суммой векторов x и y называется вектор z, координаты которого получены суммированием соответствующих координат векторов x и y:

$$z=x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, ..., x_n+y_n).$$

***Пример* 1.3.** Даны векторы $x=(0;3;-2)$ и $y=(-1;5;8)$. Найдем вектор $z=x+y$: $z=x+y=(0+(-1);3+5;-2+8)=(-1;8;6)$.

Разностью векторов x и y называется вектор $z=x-y$, координаты которого получены вычитанием соответствующих координат векторов x и y:

[1] При работе с конкретными числовыми векторами координаты будем отделять точкой с запятой.

$$z = x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, ..., x_n - y_n).$$

***Пример* 1.4.** Даны векторы $x = (0;3;-2)$ и $y = (-1;5;8)$. Найдем вектор $z = x - y$: $z = x - y = (0 - (-1);3 + 5;-2 - 8) = (1;-2;-10)$.

Произведением вектора x *на число* α называется вектор αx, координаты которого получены умножением координат вектора x на число α:

$$\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n).$$

***Пример* 1.5.** Дан вектор $x = (0;3;-2)$, $\alpha = 5$. Найдем вектор $5x$: $5x = (5 \cdot 0;5 \cdot 3;5 \cdot (-2)) = (0;15;-10)$.

Свойства арифметических операций над векторами:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

4) $(\alpha_1 + \alpha_2)x = \alpha_1 x + \alpha_2 x$;

5) $\alpha_1(\alpha_2 x) = (\alpha_1 \alpha_2)x$;

6) для любого вектора x существует вектор $-x$: $-x = -1 \cdot x$, $x + (-x) = x - x = 0$, где $0 = (0;0;...;0)$ – нулевой вектор.

Два вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ *коллинеарные* только в том случае, если их координаты пропорциональны, т.е. $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \cdots = \dfrac{x_n}{y_n}$.

Скалярным произведением векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ одинаковой размерности называется число, которое обозначается $\langle x, y \rangle$ и определяется равенством:

$$\langle x, y \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + ... + x_n \cdot y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i. \qquad (1.3)$$

Таким образом, скалярное произведение векторов (1.3) – это сумма произведений соответствующих координат векторов.

***Пример* 1.6.** Даны векторы $x = (2;-1;10)$ и $y = (6;7;1)$. Найдем скалярное произведение этих векторов по формуле (1.3):

$$\langle x, y \rangle = 2 \cdot 6 + (-1) \cdot 7 + 10 \cdot 1 = 12 - 7 + 10 = 15.$$

Из формулы (1.3) вытекают свойства скалярного произведения:

1) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$;

2) $\langle \alpha x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$;

3) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$;

4) $\langle x, x \rangle > 0$, если $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle = 0$, если $x = 0$.

Длиной или *нормой вектора* $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называется число

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}\,.$$

***Пример* 1.7.** Дан вектор $x = (1;-2;0;5;3;-5)$, найдем его длину:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2 + 3^2 + (-5)^2} = \sqrt{1 + 4 + 0 + 25 + 9 + 25} =$$
$$= \sqrt{64} = 8.$$

Расстояние между векторами (точками) $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ равно длине вектора $x - y$ или $y - x$:

$$\|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} \qquad (1.4)$$

***Пример* 1.8.** Найдем расстояние между векторами $x = (2;0;-1;5;-3;1)$; $y = (4;-2;7;2;3;-1)$.

Используем формулу (1.4):

$$\|x - y\| = \sqrt{(2-4)^2 + (0-(-2))^2 + (-1-7)^2. + (5-2)^2 + (-3-3)^2 + (1+1)^2} =$$
$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + 8^2 + 3^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 4 + 64 + 9 + 36 + 4} = \sqrt{121} = 11.$$

Из школьного курса геометрии известно, что скалярное произведение двух векторов определяется по формуле:

$$\langle x, y\rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\varphi, \qquad (1.5)$$

где φ – это угол между векторами x и y:

Из формулы (1.5) найдем косинус угла φ между векторами x и y:

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

***Пример* 1.9.** Найти угол между векторами $x = (1;4;-2;2)$ и $y = (3;1;1;5)$.

Решение. Найдем скалярное произведение векторов, длины векторов:

$$\langle x, y\rangle = 1 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + 2 \cdot 5 = 3 + 4 - 2 + 10 = 15,$$
$$\|x\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 16 + 4 + 4} = \sqrt{25} = 5,$$
$$\|y\| = \sqrt{3^2 + 1^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 1 + 1 + 25} = \sqrt{36} = 6,$$

отсюда по формуле (1.5):

$$\cos\varphi = \frac{15}{5 \cdot 6} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}, \text{ угол } \varphi = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Векторы x и y называются *ортогональными* (перпендикулярными), если их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\langle x, y\rangle = 0$.

Пример 1.10. Найти угол между векторами $x=(1;3;4)$ и $y=(-4;0;1)$.

Решение. Найдем скалярное произведение векторов, длины векторов:

$$\langle x,y\rangle = 1\cdot(-4)+3\cdot 0+4\cdot 1=-4+0+4=0,$$

$$\|x\|=\sqrt{1^2+3^2+4^2}=\sqrt{1+9+16}=\sqrt{26},$$

$$\|y\|=\sqrt{(-4)^2+0^2+1^2}=\sqrt{16+0+1}=\sqrt{17},$$

$$\cos\varphi=\frac{0}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{17}}=0,\ \varphi=\arccos 0=\frac{\pi}{2}=90^\circ.$$

1.2. Линейная зависимость и независимость векторов

Линейной комбинацией векторов $x, y\in R^n$ называется вектор вида

$$\alpha x+\beta y,$$

где α и β – произвольные, отличные от нуля числа, коэффициенты данной линейной комбинации.

В общем случае: линейной комбинацией векторов $x^1,x^2,...,x^k\in R^n$ называется любой вектор вида

$$\lambda_1 x^1+\lambda_2 x^2+...+\lambda_k x^k,$$

где $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$ –числа, коэффициенты данной линейной комбинации.

Векторы $x^1,x^2,...,x^k\in R^n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$, среди которых имеются ненулевые, такие что выполняется равенство:

$$\lambda_1 x^1+\lambda_2 x^2+...+\lambda_k x^k=0. \qquad (1.6)$$

Если же равенство (1.6) выполняется только для всех $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$, равных нулю, то векторы $x^1,x^2,...,x^k\in R^n$ – *линейно независимы*.

Пример 1.11. Установить, являются ли векторы $x^1=(2;4), x^2=(4;8)$ линейно зависимыми.

Решение. Составим линейную комбинацию по формуле (1.6):

$$\lambda_1(2;4)+\lambda_2(4;8)=0.$$

Это равенство приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases}2\lambda_1+4\lambda_2=0,\\ 4\lambda_1+8\lambda_2=0.\end{cases}\Rightarrow \lambda_1=-2\lambda_2,$$

т.е. найдутся числа λ_1 и λ_2, например, $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1$, при которых линейная комбинация нулевая, значит векторы $x^1=(2;4), x^2=(4;8)$ линейно зависимы.

Векторы $x^1=(2;4), x^2=(3;5)$ линейно независимы, так как

$$\lambda_1(2;4)+\lambda_2(3;5)=(0,0)\Rightarrow\begin{cases}2\lambda_1+3\lambda_2=0,\\4\lambda_1+5\lambda_2=0.\end{cases}$$

Откуда

$\lambda_1=\lambda_2=0$, т.е. $\lambda_1 x^1+\lambda_2 x^2=0$ выполняется лишь при $\lambda_1=\lambda_2=0.$

Пусть $Q-$произвольное множество $n-$мерных векторов, т.е. $Q\subset R^n$. Система $n-$мерных векторов $B=(x^1;x^2;\ldots;x^s)$ называется базисом в Q, если выполняются следующие условия:

1) система векторов $B=(x^1;x^2;\ldots;x^s)$ линейно независима;

2) для любого $n-$мерного вектора $x\in Q$ найдутся числа $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$, такие, что

$$x=\lambda_1 x^1+\lambda_2 x^2+...+\lambda_s x^s=\sum_{k=1}^{s}\lambda_k x^k. \qquad (1.7)$$

Формула (1.7) называется *разложением вектора* x *по базису* B. Коэффициенты $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_s$ однозначно определяются вектором x и называются координатами этого вектора в базисе B.

***Пример* 1.12.** Пусть $x^1=(3;-2), x^2=(4;1)-$некоторый базис в R^2, разложить вектор $x=(-2;5)$ по данному базису.

Решение. По формуле (1.7):

$$x=\lambda_1 x^1+\lambda_2 x^2\Rightarrow(-2;5)=\lambda_1(3;-2)+\lambda_2(4;1)\Rightarrow\begin{cases}3\lambda_1+4\lambda_2=-2,\\-2\lambda_1+\lambda_2=5.\end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $\lambda_1=-2,\ \lambda_2=1.$ Таким образом, $x=-2x^1+x^2$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Всякая система векторов $Q\subset R^n$ имеет по крайней мере один базис, все базисы этой системы состоят из одинакового числа векторов, называемого рангом системы Q и обозначаемого $r(Q)$.

2. Ранг всего пространства R^n равен n и называется размерностью этого пространства; в качестве базиса R^n можно взять следующую систему векторов: $e^1=(1;0;\ldots;0),\ e^2=(0;1;\ldots;0),\ \ldots\ldots,e^n=(0;0;\ldots;1)$. Этот базис в R^n называется *стандартным* или *каноническим*.

Задачи

1.1. Заданы векторы: $x^1=(4;1;3;-2),\ x^2=(1;2;-3;2),\ x^3=(16;9;1;-3),$ $x^4=(0;1;2;3), x^5=(1;-1;15;0)$. Найти следующие линейные комбинации: *а*) $3x^1+5x^2-x^3$; *б*) $x^1+2x^2-x^4-2x^5$; *в*) $2x^1+4x^3-2x^5$;
г) $0{,}5x^1+3x^3-0{,}5x^4+x^5$.

1.2. Заданы векторы: $x^1=(4;1;3;-2),\ x^2=(1;2;-3;2),\ x^3=(16;9;1;-3),$ $x^4=(0;1;2;3), x^5=(1;-1;15;0)$. Найти вектор a из уравнения:
а) $2a+x^1-2x^2-x^5=0$; *б*) $x^1-3x^5+a+x^3=0$;
в) $2(x^1-a)+5(x^4+a)=0$; *г*) $3(x^3+2a)-2(x^5-a)=0$.

1.3. Определить линейную зависимость или независимость векторов:
а) $x^1=(-3;1;5)$ *и* $x^2=(6;-3;15)$; *б*) $x^1=(1;2;3;0)$ *и* $x^2=(2;4;6;0)$;
в) $x^1=(2;-3;1), x^2=(3;-1;5)$ *и* $x^3=(1;-4;3)$.

1.4. Найти значения a, для которых векторы
$x^1=(1;1;1),\ x^2=(5;5;a),\ x^3=(3;-2;1;)$ линейно зависимы.

1.5. Найти длины векторов $x^1=(1;-1;-1;-1),\ x^2=(-1;1;1;-1)$ и угол между ними в пространстве R^4.

1.6. Найти $\langle p,q\rangle$, если $p=2a+b,\quad q=b-a,\ \|a\|=2, \|b\|=3$ и угол между векторами a и b равен $\dfrac{\pi}{6}$.

1.7. Какой угол образуют векторы p и q, если $\|p\|=1, \|q\|=1$ и векторы $x=p+2q$ и $y=5p-4q$ перпендикулярны?

1.8. Сумма в 1 млн р. разделена на 4 части: 100, 300, 400 и 200 тыс. р. Эти суммы помещены в четыре банка под годовую процентную ставку 6, 9, 10 и 11 % соответственно. Составить вектор вкладов и процентных ставок. Сколько денег получит вкладчик через год?

1.9. Вычислить $\langle a-b, a-b\rangle^2$, если $\|a\|=2\sqrt{2}, \|b\|=4,$ угол между векторами a и b равен 135°.

1.10. При каких значениях a и b векторы $x=(a;-2;5)$ и $y=(1;b;-3)$ коллинеарные?

Задачи для самостоятельного решения

1.11. Даны векторы $u=(1;2),\ v=(0;1),\ w=(1;-3),\ x=(1;2;0),\ y=(0;1;1)$.
Вычислить те из следующих векторов, которые имеют смысл:
$u+v-4w,\ \ u+y,\ \ 3y,\ \ 2v,\ \ u+2v,\ \ u-v,\ \ 3x+y,\ \ -2x,\ \ w+2x.$

1.12. Пусть $a=b=(-3;2;x)$. Найти x, если $\langle a,b\rangle=17$.

1.13. Пусть $x=(\sin\alpha;\cos\alpha)$. Вычислить $\langle x,x\rangle$.

1.14. Найти все значения переменной x такой, что $\langle u,u\rangle = 50$, где $u = (x;3;4)$.

1.15. Найти вектор x из уравнения $2a + b + 4x - c = 0$, где $a = (3;\ -1;\ 0;\ 0)$; $b = (6;\ -12;\ 8;\ 5)$; $c = (4;\ -1;\ 3;\ -1)$.

1.16. Найти вектор x из уравнения $3(a - x) + 2(b + x) = 5(c + x)$, где $a = (2;\ 5;\ 1;\ 3)$; $b = (10;\ 1;\ 5;\ 10)$; $c = (4;\ 1;\ -1;\ 1)$.

1.17. Найти, при каких значениях x скалярное произведение векторов $a = (2;3;0;5)$ и $b = (0;-1;2;x)$ равно нулю.

1.18. Даны векторы: $a = (-3;2;-1;4;5)$ и $b = (1;-2;5;6;8)$. Найти: *a*) расстояние между ними, *b*) скалярное произведение этих векторов.

1.19. Даны векторы: $a = (4;-2;-4;8); b = (5;-1;3;-1)$. Вычислить: a) $\langle a,b\rangle$; b) $\sqrt{\langle a,a\rangle}$; c) $\langle a,a-b\rangle$; d) $\langle 2a-b,a+3b\rangle$.

1.20. Даны векторы: $a = (1;1;-1;0)$, $b = (2;-1;2;1)$, $c = (-1;1;0;1)$. Найти длины векторов: a) a; b) $3b$; c) $a + b$; d) $-a + b + 2c$.

1.21. Даны векторы: $a = (0;5;-2;3;-4;1;-3)$ и $b = (-1;2;5;-4;-2;1;-1)$. Найти косинус угла между ними.

1.22. При каком значении λ векторы $a = (2\lambda;\lambda^2 - 1;3)$ и $b = (2;0;3\lambda)$ равны между собой?

1.23. При каком значении x векторы $a = (6;-4;8)$ и $b = (x;2;-4)$ будут:
a) коллинеарные, *b*) ортогональны?

1.24. Даны векторы $x = (2;-3;5;1;6)$ и $y = (2;2;-6;0;-2)$. Найти $\|x\| - \|y\|$, $3\|x\| - \|y\|$.

1.25. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели, которых приведены в таблице. Следует рассчитать следующие ежесуточные показатели: расход сырья *S*, затраты рабочего времени *T* и стоимость *P* выпускаемой продукции предприятия.

Вид изделия	Количество изделий, ед.	Расход сырья, кг / изд.	Норма времени изготовления, ч / изд.	Цена изделия, ден. ед. / изд.
1	10	2	9	35
2	40	3	4	20
3	30	7	14	44
4	20	6	7	25

1.26. На Омском экспериментальном заводе (ОЭЗ) сельскохозяйственной техники определены ежесуточные экономические показатели, которые представлены в таблице:

Вид изделия	Расход сырья, кг	Время изготовления, ч / изд.	Количество изделий	Цена изделий, р.
Плуг	50	120	6	90 000

Вид изделия	Расход сырья, кг	Время изготовления, ч / изд.	Количество изделий	Цена изделий, р.
Борона	40	150	5	14 000
Лущильник	60	420	7	50 000
Каток	90	220	4	300 000

Найти цены на сельскохозяйственную технику, расходы и затраты сырья.

1.27. Коммерческий банк, участвующий в строительстве сети социальных аптек в Ставрополе, предпринял усилия по получению кредитов в четырех коммерческих банках: «Сбербанк», «ВТБ24», «Московский индустриальный банк», «Россельхозбанк». Каждый из них предоставил кредиты в размерах соответственно 10, 30, 20 и 40 млрд р. под годовую процентную ставку 25, 15, 30 и 20 %. Сколько придется платить по истечении года за кредиты, взятые у банков.

1.28. Фирма $П_1$ выпускает продукцию в количестве 10 ед. в день, $П_2$ – 5 ед. в день, $П_3$ – 8 ед. в день. Сколько продукции необходимо выпускать фирме $П_4$, если цена единицы продукции фирмы $П_1$ равна 3 дол., $П_2$ – 6 дол., $П_3$ – 7 дол., $П_4$ – 4 дол., а суммарный доход от реализации произведенной за день продукции не должен быть меньше 152$?

1.29. Затраты на единицу продукции $П_2$ составляют 10 дол., $П_3$ – 9 дол. План производства в день следующий: $П_1$ – 8, $П_2$ – 7, $П_3$ – 10. Каковы должны быть затраты на единицу $П_1$, чтобы ежедневные затраты не превышали 320 дол.?

1.30. Определить минимальную цену единицы продукции $П_3$, если цена единицы $П_1$ – 5 дол., $П_2$ – 4 дол., $П_4$ – 2 дол., чтобы суммарный доход превышал 370 дол. в день, если план выпуска продукции следующий: $П_1$ – 20 ед., $П_2$ – 25 ед., $П_3$ – 30 ед., $П_4$ – 40 ед.

2. Матричная алгебра

2.1. Матрицы и операции над ними

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}.$$

Числа a_{ij}, $i = 1,2,\dots,m$, $j = 1,2,\dots,n$ называются элементами матрицы. Каждый элемент матрицы снабжен двумя индексами: первый индекс i указывает номер строки, второй индекс j – номер столбца, в котором расположен элемент.

Матрицы обозначаются прописными латинскими буквами: A, B, C, …, а их элементы – строчными буквами a, b, c,…

При записывании матриц используют круглые или квадратные скобки.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* матрицей.

Говорят, что матрица A имеет *размерность* $(m \times n)$, если она состоит из m строк и n столбцов.

***Пример* 2.1.** Примеры матриц:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Матрицы имеют следующие размерности: $A(2 \times 2)$, $B(2 \times 3)$, $C(3 \times 3)$.

Если $m \neq n$, то матрица A – прямоугольная. Если $m = n$, то матрица A – квадратная порядка (размерности) n:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

В примере 2.1 матрицы A и C – квадратные матрицы порядка (размерности) 2 и 3 соответственно.

Совокупность всех элементов a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} квадратной матрицы A называется *главной диагональю*, элементов a_{1n}, a_{2n-1}, …, a_{n1} – *побочной диагональю*.

В примере 2.1 в матрице C главную диагональ составляют элементы:

0; –5; 4, побочную диагональ: 2; –5; 1.

Квадратная матрица A называется *диагональной,* если все ее элементы, расположенные вне главной диагонали, равны нулю, а элементы главной диагонали отличны от нуля:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется *симметричной,* если $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

***Пример* 2.2.** Симметричная матрица 4-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 2 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & -8 & 9 \\ -4 & 7 & 9 & -10 \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица**,** у которой все элементы, расположенные вдоль главной диагонали равны 1, называется *единичной* матрицей и обозначается E:

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots,\ E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны 0, называется нижней и верхней треугольной соответственно.

***Пример* 2.3.** Верхняя треугольная матрица 3-го порядка: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

Нижняя треугольная матрица: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Произвольная матрица вида $C = (A|B)$, составленная из двух матриц A и B, разделенных вертикальной чертой, называется *расширенной* матрицей.

***Пример* 2.4.** Расширенная матрица $C = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$.

Над матрицами можно производить некоторые арифметические операции:

1) Равенство матриц.

Две матрицы A и B *равны* между собой, если они имеет одинаковую размерность и их соответствующие элементы равны $a_{ij}=b_{ij}$, $i=1,2,...,m$, $j=1,2,...,n$.

***Пример* 2.5.** Из приведенных матриц

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 6 & 4\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\ 4 & -10 & 0\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 6 & 4\end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix}3 & 5 & 1\\ 4 & -10 & 0\end{bmatrix}$$

равными являются матрицы A и C, B и D.

2) Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы на число называется матрица, каждый элемент которой равен произведению этого элемента на число.

Чтобы умножить матрицу на число, надо каждый элемент матрицы умножить на это число:

$$\lambda\cdot A=A\cdot\lambda=\left[\lambda\cdot a_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,\ldots,m\\ j=1,2,\ldots,n}}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_{11} & \lambda\cdot a_{12} & \ldots & \lambda\cdot a_{1n}\\ \lambda\cdot a_{21} & \lambda\cdot a_{22} & \ldots & \lambda\cdot a_{2n}\\ \vdots & & & \\ \lambda\cdot a_{m1} & \lambda\cdot a_{m2} & \ldots & \lambda\cdot a_{mn}\end{pmatrix} \qquad (2.1)$$

Формулу (2.1) можно иначе понимать так: общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

3) Сложение матриц.

Суммой матриц одинаковой размерности $A_{(m\times n)}$ и $B_{(m\times n)}$ называется матрица, которая получается сложением соответствующих элементов слагаемых матриц:

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,\ldots,m\\ j=1,2,\ldots,n}}=\begin{pmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n}\\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn}\end{pmatrix}. \qquad (2.2)$$

Свойства сложения матриц:

$$A+B=B+A,\ (A+B)+C=A+(B+C).$$

***Пример* 2.6.** Найти $A+B$, если $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 6 & -2\end{bmatrix}$.

По формуле (2.2) $A+B=\begin{bmatrix}1+0 & 3+5\\ 1+6 & 7+(-2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 8\\ 7 & 5\end{bmatrix}$.

4) Вычитание матриц.

Разность матриц одинаковой размерности $A_{(m\times n)}$ и $B_{(m\times n)}$ определяется равенством: $A-B=A+(-B)=A+(-1)\cdot B$. С учетом операций 2) и 3) имеем:

$$A-B=[a_{ij}-b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & \dots & a_{1n}-b_{1n}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & \dots & a_{2n}-b_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}-b_{m1} & a_{m2}-b_{m2} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2.3)$$

***Пример* 2.7.** Найти $A-B$, если $A=\begin{bmatrix} 1 & 3\\ -1 & 7\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 0 & 5\\ 6 & 2\end{bmatrix}$.

По формуле (2.3) $A-B=\begin{bmatrix} 1-0 & 3-5\\ -1-6 & 7-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -2\\ -7 & 5\end{bmatrix}$.

5) Произведение матриц.

Произведением матриц A размерности $(m\times n)$ и B размерности $(n\times k)$ называется матрица AB размерности $(m\times k)$, полученная по правилу:

а) количество столбцов матрицы A должно совпадать с количеством строк матрицы B;

б) каждая строка матрицы A умножается поочередно на все столбцы матрицы B, как скалярное произведение векторов:

$$A=[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad B=[b_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,k}}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k}\\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k}\\ \vdots & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk}\end{pmatrix}$$

$$AB=[(ab)_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,k}}=\begin{pmatrix} (ab)_{11} & (ab)_{12} & \dots & (ab)_{1k}\\ (ab)_{21} & (ab)_{22} & \dots & (ab)_{2k}\\ \vdots & & & \\ (ab)_{m1} & (ab)_{m2} & \dots & (ab)_{mk}\end{pmatrix}= \qquad (2.4)$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+\dots+a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+\dots+a_{1n}b_{n2} & \dots & a_{11}b_{1k}+..+a_{1n}b_{nk}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+\dots+a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+\dots+a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1k}+..+a_{2n}b_{nk}\\ \vdots & & & \\ a_{m1}b_{11}+a_{m2}b_{21}+\dots+a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12}+a_{m2}b_{22}+\dots+a_{mn}b_{n2} & \dots & a_{m1}b_{1k}+..+a_{mn}b_{nk}\end{pmatrix}$$

***Пример* 2.8.** Даны матрицы: $A=\begin{bmatrix}1 & 6\\ -3 & 8\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}7 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}$.

Найти произведение этих матриц.

Решение. По формуле (2.4):

$$AB=\left[\begin{array}{cc}1 & 6\\ \hline -3 & 8\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c|c}7 & 5 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{array}\right]=\begin{bmatrix}1\cdot 7+6\cdot 5 & 1\cdot 5+6\cdot 2 & 1\cdot 1+6\cdot 0\\ -3\cdot 7+8\cdot 5 & -3\cdot 5+8\cdot 2 & -3\cdot 1+8\cdot 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}7+30 & 5+12 & 1+0\\ -21+40 & -15+16 & -3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}37 & 17 & 1\\ 19 & 1 & -3\end{bmatrix}.$$

Свойства произведения матриц:

а) $A(BC)=(AB)C$;

б) $\lambda(AB)=(\lambda A)B$;

в) $(A+B)C=AB+AC$, $A(B+C)=AB+AC$;

г) в общем случае $AB\neq BA$;

д) $EA=AE=A$;

е) $A^k=\underbrace{A\cdot A\cdots A}_{k}$, $\quad A^0=E$.

Квадратные матрицы A и B порядка n называются *перестановочными,* если $AB=BA$.

6) Транспонирование матриц.

Транспонирование матриц – это замена строк матрицы ее столбцами с сохранением порядка.

В результате транспонирования матрицы $A\,(m\times n)$ получим транспонированную матрицу A^t $(n\times m)$.

***Пример* 2.9.** Дана матрица $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & -6\end{bmatrix}$. В результате транспонирования получим матрицу: $A^t=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & -6\end{bmatrix}$.

Свойства транспонирования матриц:

а) $(A^t)^t=A$;

б) $(\alpha A)^t=\alpha A^t$, где α – число;

в) $(A+B)^t=A^t+B^t$;

г) $(AB)^t=B^tA^t$.

Задачи

2.1. Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 5\\ 6 & -5 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4\\ -3\\ 5\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}7 & 3 & 2\\ -4 & 3 & 5\\ 6 & 1 & -1\end{pmatrix}$. Определить размерность заданных матриц. Найти значения элементов a_{12}, a_{22}, a_{23}, b_{11}, b_{31}, c_{13}, c_{31}, c_{33}.

2.2. Если $\begin{pmatrix}a+b & c+d\\ c-d & a-b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 6\\ 10 & 2\end{pmatrix}$. Найти $a,\ b,\ c$ и d.

2.3. Если $\begin{pmatrix}a+2b & 2a-b\\ 2c+d & c-2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$. Найти $a,\ b,\ c$ и d.

2.4. Заданы матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 5\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & 4\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}2 & -4 & 5\\ 0 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix},\ F=\begin{pmatrix}-4 & 5\\ 2 & 3\end{pmatrix}, O=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Вычислить, если это возможно:

1. $a)$ $C+E,\ E+C$; $b)$ $A+B$; $c)$ $D-F$;

$d)$ $-3C+5O$; $e)$ $2C-3E$; $f)$ $2B+F$.

2. $a)$ $3D+2F$; $b)$ $3(2A),\ 6A$; $c)$ $2A+3A,\ 5A$;

$d)$ $2(D+F),\ 2D+2F$; $e)$ $(2+3)D,\ 2D+3D$; $f)$ $3(B+D)$.

3. $a)$ A^T, $(A^T)^T$; $b)$ $(C+E)^T$, C^T+E^T; $c)$ $(2D+3F)^T$;

$d)$ $D-D^T$; $e)$ $2A^T+B$; $f)$ $(3D-2F)^T$.

4. $a)$ $(2A)^T$; $b)$ $(A-B)^T$; $c)$ $(3B-2A)^T$;

$d)$ $(3A^T-5B^T)^T$; $e)$ $(-A)^T$, $-(A^T)$; $f)$ $(C+E+F^T)^T$.

2.5. Найти матрицу $C = -5A + 2B,$ если

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ б)\ A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.6. Найти матрицу $C = A^T - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

2.7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислить, если это возможно: *a)* $A + B$; *b)* $A^T + B$; *c)* $A + B^T$; *d)* $A \cdot B$; *e)* $B \cdot A$; *f)* $A^T \cdot B$; *g)* $A \cdot B^T$; *h)* $A^T \cdot B^T$; *i)* $B^T \cdot A^T$.

2.8. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} y \\ x \\ 1 \end{pmatrix}$. Если $A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$, найти x и y.

2.9. Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Найти $B^T \cdot A^T \cdot A \cdot B$.

2.10. Найти произведение матриц:

$$a) \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\ b) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$c) \begin{pmatrix} 5 & 8 & -4 \\ 6 & 9 & -5 \\ 4 & 7 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -1 & 3 \\ 9 & 6 & 5 \end{pmatrix},\ d) \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.11. Решить систему матричных уравнений $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$

Задачи для самостоятельного решения

2.12. Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если возможно

$$a)\, A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\; b)\; A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c)\; A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\; d)\; A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

2.13. Найти матрицу A^n: $a)$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, $n = 3$. $b)$ $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$, $n = 5$.

2.14. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Вычислить: $a)$ A^3, $b)$ B^2, $c)$ $(A \cdot B)^3$.

2.15. Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Найти A^4.

2.16. Даны матрицы $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $G = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $2G - C^2$.

2.17. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix},\; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},\; C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\; D = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\; F = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Вычислить, если это возможно:

$$a)\; A \cdot B,\; b)\; F^T \cdot E,\; c)\; C \cdot B + D,\; d)\; A \cdot B + D^2.$$

2.18. Даны следующие матрицы

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 9 & 2 & 4 & 0\\ 1 & 4 & -1 & 3 & -1\\ 0 & 2 & -2 & 4 & 2\\ 3 & 1 & 0 & -2 & 3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 3\\ 2 & 1 & 5 & 0\\ 6 & 7 & 0 & 8\\ 0 & -3 & 1 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -3 & 4 & 5\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}0 & 0 & -3\\ 2 & -1 & 4\\ 7 & 0 & 1\\ 2 & -2 & 5\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}1 & 8\\ 3 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\\ 4 & 0\\ 3 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix}.$$

Найти: *a*) все произведения матриц, которые имеют смысл; *b*) соответствующие транспонированные матрицы; *c*) матрицу C^3.

2.19. Найти значение многочлена $f(x)$ от матрицы A:

a) $f(x)=3x^2-2x+5,$ $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}.$

b) $f(x)=x^3-7x^2+13x-5,$ $A=\begin{pmatrix}5 & 2 & -3\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

2.20. Три предприятия выпускают четыре вида изделий. Задана матрица выпуска продукции

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}1150 & 1250 & 1020 & 1384\\ 2030 & 3700 & 2700 & 1856\\ 1500 & 990 & 1058 & 720\end{pmatrix},$$

a_{lk} $(l=1,2,3;\ k=1,2,3,4)$ – объем выпущенных изделий k-го вида на l-м предприятии с начала года на конец некоторого месяца. Найти месячный объем выпуска изделий на каждом предприятии, если аналогичная матрица через месяц имела вид

$$B=\left[b_{lk}\right]=\begin{pmatrix}2370 & 1980 & 1790 & 1880\\ 3500 & 4736 & 4015 & 2750\\ 2220 & 2112 & 2010 & 1830\end{pmatrix}.$$

2.21. Три типа транспортных самолетов распределены между четырьмя авиалиниями. Заданы матрицы объемов перевозок:

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}15&10&20&50\\20&25&10&17\\35&50&30&45\end{pmatrix} \text{ и } B=\left[b_{lk}\right]=\begin{pmatrix}97&54&75&200\\83&102&49&79\\71&210&150&180\end{pmatrix},$$

где a_{lk} и b_{lk} $(l=1,2,3;\ k=1,2,3,4)$ – накопленные с начала года объемы перевозок самолетами l типа на k-й авиалинии, соответственно, на 30 апреля и 1 сентября некоторого года.

Найти объемы перевозок, осуществленных самолетами каждого типа по каждой авиалинии за период с 30 апреля по 1 сентября.

2.22. Данные о продукции добывающей промышленности по определенным видам минерального сырья группируются по областям, являющимся основными поставщиками этого сырья. Заданы матрицы добычи:

$$A=\left[a_{lk}\right]=\begin{pmatrix}450&780&210\\1050&240&90\\1500&120&590\end{pmatrix} \text{ и } B=\left[b_{lk}\right]=\begin{pmatrix}520&910&220\\1080&580&290\\1460&830&600\end{pmatrix},$$

где a_{lk} и b_{lk} $(l,k=1,2,3)$ – объемы добычи в тыс. тонн минерального сырья k-го вида в l-й области в два разных года.

Рассчитайте матрицу приростов добычи за период с конца первого года на конец второго. Найти матрицу средних годовых размеров добычи.

2.23. Предприятие выпускает три вида продукции в количествах, характеризуемым вектором $x=(x_1,x_2,x_3)$. При выпуске продукции используют пять видов сырья. Задана матрица расходов сырья $A=\left[a_{lk}\right], a_{lk}$ – расход k-го вида сырья на единицу l-го вида продукции. Вектор c задает стоимость единицы каждого вида сырья.

Определить:

a) необходимое количество единиц сырья каждого вида для обеспечения плана;

b) стоимость сырья для единицы каждого вида продукции;

c) общую стоимость сырья при выполнении плана выпуска при следующих данных:

$$x=\begin{pmatrix}10\\7\\4\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}5&4&6\\10&8&12\\3&5&4\\9&6&3\\2&8&10\end{pmatrix},\quad c=\begin{pmatrix}7\\4\\5\\10\\2\end{pmatrix}.$$

2.24. Сведения о продажах торговой фирмы, объединяющей три магазина, заданы матрицами:

$$A=[a_{lk}]=\begin{pmatrix}17&4&12\\6&4&13\\11&4&8\\7&4&6\end{pmatrix},\quad B=[b_{lk}]=\begin{pmatrix}20&5&10\\10&5&15\\20&5&8\\10&5&10\end{pmatrix},\quad C=[c_{lk}]=\begin{pmatrix}12&3&4\\8&3&4\\10&3&6\\4&3&7\end{pmatrix},$$

где a_{lk}, b_{lk}, c_{lk} – суммы, выученные на протяжении l-го сезона от продажи k-го вида товара по первому, второму и третьему магазинам соответственно.

a) Покажите, что в каждый сезон I и III магазины, вместе взятые, продали больше каждого вида товаров, чем магазин II.

b) Найдите общую выручку от продажи одинаковых товаров тремя магазинами по каждому сезону.

2.25. Компания продает компьютеры пяти моделей *A, B, C, D, E* в трех магазинах 1, 2, 3. Количество компьютеров в каждом из магазинов задано матрицей *M*

A	*B*	*C*	*D*	*E*	
4	2	3	7	1	1
2	3	5	0	6	2
10	4	3	4	3	3

Оптовые цены ω_i и розничные p_i представлены матрицей N

ω_i	p_i	
700	840	*A*
1 400	1 800	*B*
1 800	2 400	*C*
2 700	3 300	*D*
3 500	4 000	*E*

Найдите следующие произведения и дайте интерпретацию каждому из них. *a*) *MN; b*) *M* на (1; 1; 1); *c*) *MN* на (1; 1; 1).

2.26. Предприятие производит три вида продукции используя четыре типа ресурсов. Цены в рублях единицы каждого вида продукции и типа ресурса постоянны и заданы соответственно векторами $p=(p_1,p_2,p_3)$ и $z=(z_1,z_2,z_3,z_4)$. Выпуск продукции может производиться одним из двух способов. Первый способ описывается матрицей удельных затрат A_{ij} и обеспечивает вектор выпуска $x=(x_1,x_2,x_3)$, второй – матрицей удельных затрат B_{ij} и обеспечивает вектор выпуска $y=(y_1,y_2,y_3)$. a_{ij}, b_{ij} – затраты в физических единицах i-го вида ресурса на производство j-го вида продукции в первом и втором способах, x_i, y_i – объемы выпуска i-го вида продукции в единицу времени. Какой способ производства дает большую прибыль и насколько? Значения матриц приведены ниже

$$A=\begin{pmatrix}5&4&8\\10&12&15\\6&11&4\\3&2&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}6&7&10\\9&15&12\\8&8&5\\2&2&3\end{pmatrix},\ p=\begin{pmatrix}110\\100\\120\end{pmatrix},$$

$$z=\begin{pmatrix}8\\2\\1\\6\end{pmatrix},\ x=\begin{pmatrix}14\\10\\15\end{pmatrix},\ y=\begin{pmatrix}12\\10\\16\end{pmatrix}.$$

В некоторой отрасли m заводов выпускают n видов продукции. Матрица $A(m\times n)$ задает объемы продукции на каждом заводе в первом квартале, матрица $B(m\times n)$ – во втором. Матрица C $(n\times 1)$– стоимость единиц каждого из видов продукции. Найти:

a) объемы выпущенной продукции за 2 квартала;

b) прирост объемов во втором квартале по видам продукции и заводам;

c) стоимость продукции, выпускаемой каждым заводом.

2.27. Предприятие выпускает три вида продукции, используя два вида сырья, нормы расхода сырья на единицу продукции задаются матрицей $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\end{pmatrix}$. определить денежные расходы предприятия на выпуск товаров, задаваемый вектором $C=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, если стоимость единицы каждого вида сырья выражается вектором $P=(2;3)$.

2.28. Предприятие производит мебель трех видов и продает ее в четырех регионах. Матрица $B=\begin{pmatrix}2&5&1&2\\1&8&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$ задает количество реализованной мебели i-го типа в j-м регионе. Определить выручку предприятия в каждом регионе, если цена реализации единицы мебели i-го типа задана вектором $A=(100;200;300)$.

2.29. Предприятие выпускает четыре вида продукции в количестве 40, 100, 50 и 120 ед. в день, используя три вида сырья. Расход сырья (в кг на ед. продукции) характеризуется матрицей $A=\begin{pmatrix}2&5&3&1\\4&1&5&3\\1&2&4&4\end{pmatrix}$, где a_{ij} – затраты сырья i-го вида на изготовление единицы продукции j-го вида. Сколько сырья каждого вида расходуется ежедневно?

2.30. Предприятие выпускает три вида продукции в количестве, характеризуемом вектором $x=(1;7;4)$. Для ее изготовления используют пять видов сырья. Расход сырья (в кг на единицу продукции) характеризуется матрицей

$A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ 10 & 8 & 12 \\ 3 & 5 & 4 \\ 9 & 6 & 3 \\ 2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$, где a_{ij} – затраты сырья i-го вида на изготовление единицы

продукции j-го вида, вектор $P=(7;4;5;1;2)$ задает стоимость единицы каждого вида сырья. Определить: *a*) количество сырья каждого вида, необходимого для обеспечения плана; *b*) общую стоимость сырья, необходимого для выпуска всей продукции.

2.2. Определители квадратных матриц

Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие некоторое число, которое считается по заданному правилу и называется *определителем матрицы.*

Порядком определителя называется порядок матрицы, для которой рассматривается данный определитель.

Определитель матрицы обозначается символами:

$$|A|=\det A=\Delta A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если дана квадратная матрица второго порядка:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

то ее определителем называется число:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{21}\cdot a_{12}, \tag{2.5}$$

т.е. определитель матрицы второго порядка равен разности произведений элементов главной диагонали и произведения элементов побочной диагонали.

***Пример* 2.10.** Найти определитель матрицы $A=\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение: $|A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -3 - 4 = -7$.

Если дана квадратная матрица третьего порядка:

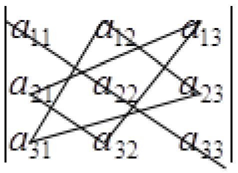
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

то ее определитель можно найти по нескольким правилам: треугольников, Саррюса, звездочки, разложение определителя по строке или столбцу.

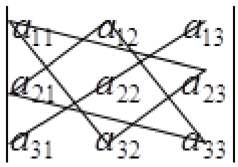
Правило «звездочка»:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - , \qquad (2.6)$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

главная диагональ (+):



побочная диагональ (–):



***Пример* 2.11.** Вычислить определитель по формуле (2.6).

Решение: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 4 \cdot 8 \cdot 3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 2 \cdot 4 \cdot 9 - 6 \cdot 8 \cdot 1 =$

$= 45 + 84 + 96 - 105 - 72 - 48 = 0.$

Минором M_{ij} квадратной матрицы A называется определитель, полученный вычеркиванием в этой матрице i-й строки и j-го столбца. Порядок минора на одну единицу меньше порядка матрицы.

Алгебраическим дополнением A_{ij} квадратной матрицы A называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

Если матрица A имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то, например, ее минор M_{21} находится следующим образом (вычеркиваем вторую строку и первый столбец):

$$M_{21} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

а алгебраическое дополнение A_{21} вычисляется по формуле:

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot M_{21} = -1 \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим определитель порядка n:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любой строки или столбца на их алгебраические дополнения.

Выпишем разложение определителя порядка n:

а) по i-й строке:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1} \cdot (-1)^{i+1} \cdot M_{i1} + a_{i2} \cdot (-1)^{i+2} \cdot M_{i2} + \dots +$$

$$+ a_{in} \cdot (-1)^{i+n} \cdot M_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij};$$

б) по j-му столбцу:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{1j} \cdot (-1)^{1+j} \cdot M_{j1} + a_{2j} \cdot (-1)^{2+j} \cdot M_{2j} + \dots +$$

$$+ a_{nj} \cdot (-1)^{n+j} \cdot M_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Это правило называется *разложением определителя* по строке или по столбцу.

При разложении определителя по строке или столбцу целесообразно использовать строку или столбец, содержащие наибольшее количество нулей (тогда число слагаемых сократится). Если таких строк или столбцов нет, то нули можно получить, упростив определитель, используя его свойства.

Свойства определителей:

1) При транспонировании матрицы значение определителя не изменится:

$$|A| = |A^T|.$$

2) Если определитель содержит полностью нулевую строку (столбец), то его значение равно нулю.

3) Значение определителя не изменится, если к одной из его строк (столбцов) прибавить другую строку (столбец), умноженную на произвольное число, не равное нулю.

4) Если определитель содержит две одинаковые строки (столбцы), то его значение равно нулю.

5) Если определитель содержит две линейно зависимых строки (столбца), то его значение равно нулю.

6) Если строка (столбец) определителя содержит общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.

7) Если строка (столбец) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то его можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

8) Определитель матрицы поменяет знак на противоположный при перестановке двух строк (столбцов) местами.

9) Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей этих матриц.

***Пример* 2.12.** Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

Для упрощения определителя выполним следующие действия:

1) первая строка как рабочая останется неизменной;
2) из второй строки вычтем первую, умноженную на 3;
3) к третьей строке прибавим первую;
4) к четвертой строке прибавим первую, умноженную на 2.

В определителе изменятся 2-я, 3-я и 4-я строки:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 4 & 6 \\ -1 & 5 & 8 & 2 \\ -2 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & -5 & 18 \\ 0 & 3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & 13 & -6 \end{vmatrix},$$

после проведенного упрощения мы разложим определитель по первому столбцу, полученный определитель 3-го порядка вычислим по правилу «звездочка»:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 8 & -5 & 18 \\ 0 & 3 & 11 & -2 \\ 0 & -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -5 & 18 \\ 3 & 11 & -2 \\ -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -5 & 18 \\ 3 & 11 & -2 \\ -1 & 13 & -6 \end{vmatrix} = 480.$$

Задачи

2.31. Вычислить определители второго порядка:

$a)\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$, $b)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}$, $c)\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$, $d)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, $e)\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$.

.

2.32. Найти, при каком значении x определитель $\begin{vmatrix} 4 & x \\ -5 & 3 \end{vmatrix}$ равен 1.

2.33. Вычислить определители 3-го порядка:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *b)* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$ *c)* $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ *e)* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ *f)* $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

2.34. Решить уравнения:

a) $\begin{vmatrix} t+1 & -2 \\ 2 & t-3 \end{vmatrix} = 0,$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0,$ c) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

2.35. Решить неравенства:

a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} < 1,$ b) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0.$

2.36. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$. Найти определитель матрицы $B = A^T \cdot A$.

2.37. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Найти следующие миноры и алгебраические дополнения этой матрицы: M_{23}, M_{14}, M_{34}, A_{32}, A_{43}, A_{24}.

2.38. Разложить определитель по третьему столбцу: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix}$.

2.39. Найти область определения функций:

a) $\log_3 \begin{vmatrix} 4 & 0 & x \\ 2 & 1 & 0 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix},$ b) $\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2^{-2x} \\ 2^x & 15 & 2^{3x} \\ -2^{2x} & 2^x & 2^{2x} \end{vmatrix}}.$

2.40. Вычислить определители:

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 & -2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 7 & 6 & 3 & 7 \\ 5 & 4 & 3 & 5 \\ -5 & -6 & -5 & -4 \end{vmatrix}$

$d)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $e)\ \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ $f)\ \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

$g)\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ $h)\ \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 & 4 \\ 4 & 3 & -1 & 2 \\ 8 & 5 & -3 & 4 \\ 3 & 3 & -6 & 6 \end{vmatrix}$ $i)\ \begin{vmatrix} -3 & 2 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 0 & -7 \\ 1 & -5 & 2 & 0 & -3 \\ 9 & 7 & 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}.$

Задачи для самостоятельного решения

2.41. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} x^2+1 & 3^{2x} & x & 3^{-x} \\ x^2-1 & 0 & x+1 & 0 \\ x^2 & 3^x & x+2 & 3^{2-x} \\ 0 & 0 & \sin x & 0 \end{vmatrix} = 0.$

2.42. Решить уравнение: $\begin{vmatrix} \log_4 x & 0 & 0 & -2 \\ \log_2 x & x & \log_4 x & x^2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ x^2 & -3 & 0 & x \end{vmatrix} = -9.$

2.43. Найти значение c, при котором определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & c & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ равен } 10^3.$$

2.44. В каких пределах может изменяться определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} c & c & 1 \\ c & 1 & c \\ 1 & c & c \end{pmatrix}, \text{ если } |c| \le 1?$$

2.45. Вычислить определитель: $a)\begin{vmatrix} -2 & -5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 & 1 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix}$,

$b)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

2.46. Решить уравнение: $a)\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0,\ b)\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ x & 1 & x \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}=1,$

$c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & x \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=7,\ d)\begin{vmatrix} 1 & x & 0 & x \\ -1 & x & 0 & -2 \\ 0 & x & 1 & 1 \\ -1 & x & 1 & x \end{vmatrix}=0.$

2.47. Решить неравенство: $a)\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & x \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ x & x & 1 & 1 \end{vmatrix}\le 0, b)\begin{vmatrix} x & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -x & 1 & -1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -x \end{vmatrix}\le 0.$

2.3. Обратная матрица

Матрица A называется *невырожденной* (неособой), если $|A|\neq 0.$ В противном случае она называется *вырожденной* (особой).

Матрица A^{-1} называется *обратной* по отношению к квадратной матрице A, если выполняется условие

$$A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E, \tag{2.7}$$

где E – единичная матрица.

Обратная матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная.

Пусть квадратная матрица A порядка n имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица для A определяется по формуле:

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}, \tag{2.8}$$

где $A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ – присоединенная матрица, составленная из алгебраических дополнений к элементам матрицы A.

Свойства обратных матриц:

1) $(A^{-1})^{-1}=A.$

2) $(A^{-1})^t=(A^t)^{-1}.$

3) $(A^{-1})^m=(A^m)^{-1}.$

4) $\left|A^{-1}\right|=\dfrac{1}{|A|}.$

5) $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$

***Пример* 2.13.** Для матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ найти обратную матрицу.

Решение. Вычислим определитель

$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=40-1-18-15-4-12=-10\neq 0,$ значит A^{-1} существует.

Найдем алгебраические дополнения к элементам матрицы A:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=18, \qquad A_{21}=-1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-13, \qquad A_{31}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}=11,$$

$$A_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 16, \quad A_{23} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -11, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 7.$$

Составим присоединенную матрицу из найденных алгебраических дополнений: $A^* = \begin{pmatrix} 18 & -13 & 11 \\ -10 & 5 & -5 \\ 16 & -11 & 7 \end{pmatrix}$.

По формуле (2.8) получаем:

$$A^{-1} = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 18 & -13 & 11 \\ -10 & 18 & -5 \\ 16 & -11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -3{,}6 + 1{,}3 + 3{,}3 & -5{,}4 + 6{,}5 - 1{,}1 & 1{,}8 + 2{,}6 - 4{,}4 \\ 2 - 0{,}5 - 1{,}5 & 3 - 2{,}5 + 0{,}5 & -1 - 1 + 2 \\ -3{,}2 + 1{,}1 + 2{,}1 & -4{,}8 + 5{,}5 - 0{,}7 & 1{,}6 + 2{,}2 - 2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

***Пример* 2.14.** Решить матричное уравнение: $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение. Обозначим $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}$, тогда исходное уравнение имеет вид:

$$A \cdot X = B.$$

Умножим обе части этого уравнения на A^{-1} слева, получим

$$A^{-1} A \cdot X = A^{-1} B.$$

Тогда в силу (2.7) имеем $E \cdot X = A^{-1}B$ и $X = A^{-1}B.$

Таким образом, чтобы решить это уравнение нужно для матрицы A найти обратную и умножить ее на B слева.

Вычислим определитель $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 3 = -5,$

найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = -1, \qquad A_{21} = -1, \qquad A_{12} = -3, \quad A_{22} = 2.$$

Получаем $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$, тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix}.$

Задачи

2.48. Выяснить, какие из приведенных ниже матриц имеют обратные:

$$a)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}; \quad b)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad c)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}; \quad d)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

2.49. Найти обратные матрицы, для следующих матриц:

$$a)\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad b)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}; \quad c)\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad d)\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.50. Определить, при каких значениях α существует матрица, обратная данной: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

2.51. При каком α не существует обратная матрица к матрице

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -\alpha & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.52. Показать, что матрица A является обратной для B, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.53. Решить матричные уравнения:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$; *b)* $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$;

c) $X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

2.54. Вычислить $B=11(A^{-1})^t + A^t$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

2.55. Вычислить $D=(P^{-1}X)^t P(P^{-1}X)$, где $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2.56. Вычислить $D=X^t(P^{-1})^t AP^{-1}X$, где $P=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.57. Решить матричное уравнение $AX+3X=B,$ если $A=\begin{pmatrix}-4 & 5 & 4\\ 0 & -1 & 5\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & 3 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

2.58. Решить матричное уравнение $XA=B+X,$ если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix}-4 & 3 & 0\\ 2 & 5 & -1\end{pmatrix}.$

2.59. Решить матричное уравнение: *a)* $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix},$

$b)\ X\begin{pmatrix}3 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 0\\ 2 & 4\end{pmatrix},$ $c)\ \begin{pmatrix}3 & -2\\ 2 & -1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix},$

$d)\ \begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}2 & 3 & 3\\ 1 & -4 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 3\\ 3 & 4 & 2\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$

2.4. Модель Леонтьева межотраслевого баланса

Рассмотрим некоторую систему хозяйства, которая состоит из n отраслей. Предположим, что эта система автономна, т.е. отрасли обмениваются продукцией между собой, не получая ничего извне. Предположим, что весь процесс производства рассматривается за некоторый фиксированный промежуток времени.

Пусть x_i – общий объем продукции i-й отрасли, x_{ij} – объем i-й отрасли, потребляемой j-й отраслью, y_i – объем продукции i-й отрасли, предназначенной для потребления в непроизводственной сфере, называемый конечным продуктом $i, j=\overline{1,n}.$

В силу автономности системы все переменные связаны *уравнениями баланса*:

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{in} + y_i,\ i=\overline{1,n}. \tag{2.9}$$

На основе анализа экономики США В.В. Леонтьевым был сформулирован *принцип линейности материальных затрат*: материальные затраты i-й отрасли на нужды j-й отрасли пропорциональны объему продукции i-й отрасли.

Это означает, что отношение $\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ постоянно для каждой пары (i, j). Вводя коэффициент пропорциональности $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$, называемый *коэффициентом прямых затрат*, получаем равенство

$$x_{ij} = a_{ij} x_j, \tag{2.10}$$

которое характеризует принцип линейности материальных затрат.

В соответствии с (2.10) уравнения баланса принимают вид:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + y_1, \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + y_n, \end{cases} \tag{2.11}$$

или в матричной форме

$$x = Ax + y, \tag{2.12}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots. \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \textit{матрица прямых затрат},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \textit{вектор валового выпуска},$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \textit{вектор конечного продукта},\ a_{ij}, x_i, y_i \ge 0.$$

Уравнение (2.12) называют *моделью Леонтьева межотраслевого баланса*.

Необходимо по матрице прямых затрат A и вектору конечного продукт y определить, существует ли решение x уравнения (2.12). Если решение существует, то матрица прямых затрат A и модель Леонтьева (2.12) называются *продуктивными*. Если решение x уравнения (2.12) существует, то его можно найти по формуле

$$x = (E - A)^{-1} y. \tag{2.13}$$

Матрица $(E - A)^{-1}$ называется *матрицей полных затрат*.

Также для определения продуктивности матрицы прямых затрат можно использовать критерии:

1) Квадратная матрица A продуктивна только в том случае, если матрица $E - A$ обратима и все элементы матрицы $(E - A)^{-1}$ – неотрицательны.

2) Квадратная матрица A продуктивна только в том случае, если максимальное по модулю собственное значение матрицы A меньше 1.

3) Квадратная матрица A продуктивна только в том случае, если сумма элементов любого ее столбца (строки) не превосходит 1, причем хотя бы для одного столбца (строки) эта сумма строго меньше 1.

***Пример* 2.15.** Определить, продуктивна ли матрица прямых затрат, если данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени представлены в табл. 1.

Таблица 1

№ отрасли	Отрасль	Потребление			Конечный продукт y	Валовый выпуск x
		1	2	3		
1	Машиностроение	16	18	36	10	80
2	Энергетика	16	36	18	20	90
3	Станкостроение	16	18	36	20	90

Найти валовый выпуск при условии, что конечный продукт 1-й отрасли увеличился втрое, 2-й – вдвое, 3-й – не изменился.

Решение. Найдем значения матрицы прямых затрат по формуле $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$,

получим: $A = \begin{pmatrix} \dfrac{16}{80} & \dfrac{18}{90} & \dfrac{36}{90} \\ \dfrac{16}{80} & \dfrac{36}{90} & \dfrac{18}{90} \\ \dfrac{16}{80} & \dfrac{18}{90} & \dfrac{36}{90} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$, вектор валового выпуска

$x = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 90 \end{pmatrix}$, вектор конечного продукта $y = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix}$.

Для определения продуктивности используем первый критерий, найдем

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}2 & 0{,}6 & -0{,}2 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}.$$

Для этой матрицы найдем обратную матрицу

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}25 & 1{,}75 \\ 1 & 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}25 & 2{,}75 \end{pmatrix}.$$

Так как все элементы обратной матрицы неотрицательны, то матрица A продуктивна.

Воспользуемся продуктивностью матрицы A и найдем валовый выпуск по формуле (2.13) при условии, что конечный продукт изменился, получим

$$x = (E - A)^{-1} y = \begin{pmatrix} 2 & 1{,}25 & 1{,}75 \\ 1 & 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}25 & 2{,}75 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 145 \\ 160 \\ 135 \end{pmatrix}.$$

Если сравнить прежний валовый выпуск $\begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 90 \end{pmatrix}$ и новый $\begin{pmatrix} 145 \\ 160 \\ 135 \end{pmatrix}$, то можно сделать вывод, что в машиностроении он увеличился на 81,25 %, в энергетике – примерно на 77,78 %, в станкостроении – на 50 %.

Задачи

2.60. Определить, является ли матрица прямых затрат A в модели Леонтьева продуктивной.

$$a)\,A=\begin{pmatrix}0{,}4 & 0{,}2\\ 0{,}5 & 0{,}3\end{pmatrix};\quad b)\,A=\begin{pmatrix}0{,}1 & 0{,}9 & 0{,}4\\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5\\ 0{,}3 & 1{,}1 & 0{,}3\end{pmatrix}.$$

2.61. По известной матрице прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}3 & 0{,}5\\ 0{,}6 & 0{,}2\end{pmatrix}$ и вектору валового продукта $x=\begin{pmatrix}100\\ 200\end{pmatrix}$ в модели Леонтьева найти вектор конечного спроса y.

2.62. Таблица содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить, соответственно, до 60, 70 и 30 усл. ден. ед.

Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	1	2	3		
Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
Энергетика	10	10	20	60	100
Машиностроение	20	10	10	10	50

2.63. В таблице приведены коэффициенты прямых затрат и конечная продукция отраслей на плановый период, усл. ден. ед.

Отрасль		Потребление		Конечный продукт
		1	2	
Производство	1	0,3	0,25	300
	2	0,15	0,12	100

Найти плановые объемы валовой продукции отраслей, чистую продукцию отраслей.

Задачи для самостоятельного решения

2.64. Определить, является ли матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}7\\ 0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}$ в модели Леонтьева продуктивной?

2.65. В таблице приведены данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени.

Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
	1	2	3		

1	10	20	20	10	60
2	20	30	10	20	80
3	10	10	40	20	80

Определить, продуктивна ли матрица прямых затрат, если продуктивна, найти валовый выпуск при условии, что конечный продукт 1-й отрасли увеличился на 20 %, 2-й – увеличился на 10 %, 3-й – уменьшился на 15 %.

2.66. Пусть для некоторого баланса двух отраслей известна матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix} 0{,}12 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$ и вектор конечного потребления $y=(72;10)$. Требуется: *a*) найти соответствующие объемы валового выпуска каждой отрасли; *b*) пусть надо удвоить выпуск конечного продукта второй отрасли. На сколько процентов должны измениться объемы валового выпуска каждой отрасли?

2.67. Пусть для некоторого баланса трех отраслей промышленности известна матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ и вектор конечного продукта $y=\begin{pmatrix} 30 \\ 20 \\ 40 \end{pmatrix}$. По этим данным составить таблицу баланса рассматриваемых трех отраслей (аналогично табл. 1 из примера 2.13).

2.68. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период между двумя отраслями промышленности в усл. ед. Найти: матрицу прямых затрат, матрицу полных затрат. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если объем выпуска конечного продукта 1-й отрасли возрастет на 10 %.

Отрасль	Потребление		Конечный продукт	Валовый выпуск
	1	2		
1	5 000	15 000	80 000	100 000
2	10 000	10 000	180 000	200 000

2.69. В таблице приведены данные об исполнении баланса за отчетный период между тремя отраслями промышленности в усл. ед. Найти: матрицу прямых затрат, матрицу полных затрат. Вычислить необходимый объем валового выпуска каждой отрасли, если *a*) конечный продукт 1-й отрасли возрастет на 20 %,

b) конечный продукт 2-й отрасли увеличится вдвое,

c) конечный продукт по каждой отрасли возрастет на 50 %.

Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
	1	2	3		
1	20	70	10	1 000	1 100
2	30	60	10	500	600
3	20	40	90	1 000	1 150

Коэффициенты матрицы прямых затрат считать, взяв четыре цифры после запятой.

2.5. Ранг матрицы

Рангом матрицы A называется максимальное число ее линейно независимых строк (столбцов), ранг матрицы обозначается *r(A)* или *rank(A)*.

Выберем в матрице A $(m \times n)$ любые k строк и k столбцов. Из элементов, находящихся на их пересечении, образуем определитель, который называется *минором* порядка k и обозначается M_k, где $k = \overline{1, \min(m,n)}$.

Ранг матрицы равен максимальному порядку отличного от нуля минора матрицы.

Для вычисления ранга матрицы использую методы:

1) *Метод окаймляющих миноров*.

Следует переходить от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если уже найден минор k-го порядка $M_k \neq 0$, то требуют вычисления все миноры $(k+1)$-го порядка, окаймляющие минор M_k (окаймляющие – полученные путем добавления к M_k элементов еще одной строки (столбца) матрицы). Если все окаймляющие миноры равны нулю, то ранг матрицы равен k. Если среди окаймляющих миноров найдется минор не равный нулю, то вся процедура повторяется для него.

***Пример* 2.16.** Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ методом окаймляющих миноров.

Решение. Выберем минор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 12 = 18 \neq 0$.

Вычислим окаймляющие миноры:

$$M_3^{'}=\begin{vmatrix}1 & 3 & -2\\ 2 & 6 & 2\\ -1 & -3 & 3\end{vmatrix}=0,$$ так как 1-й и 2-й столбцы пропорциональны;

$$M_3^{''}=\begin{vmatrix}3 & -2 & -1\\ 6 & 2 & -2\\ -3 & 3 & 1\end{vmatrix}=0,$$ так как 1-й и 3-й столбцы пропорциональны;

$$M_3^{'''}=\begin{vmatrix}3 & -2 & 4\\ 6 & 2 & -1\\ -3 & 3 & 0\end{vmatrix}=72-6+24+9\neq 0.$$

Так как $M_3 \neq 0,$ то $r(A)=3.$

2) *Метод элементарных преобразований*.

Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

К элементарным преобразованиям над стоками (столбцами) матрицы относятся:

a) перемена местами строк (столбцов);

b) умножение строки (столбца) на число не равное 0;

c) прибавление к строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число.

С помощью этих преобразований можно нулевые строки (столбцы), которые можно вычеркнуть и тем самым уменьшить размерность матрицы.

***Пример* 2.17.** Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1 & 4\\ 1 & -2 & 3 & -2\\ 3 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}$ методом элементарных преобразований.

Решение. Поменяем местами 1-ю и 2-ю строки $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -2\\ 2 & 3 & -1 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 2\end{pmatrix}.$

Из 2-й строки отнимем 1-ю, умноженную на 2, из 3-й строки отнимем 1-ю, умноженную на 3, получим $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -2\\ 0 & 7 & -7 & 8\\ 0 & 7 & -7 & 8\end{pmatrix}.$

Из 3-й строки вычтем 2-ю, получится нулевая строка, которую можно вычеркнуть, получим $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -2\\ 0 & 7 & -7 & 8\end{pmatrix}$.

В матрице осталось 2 строки, которые являются линейно независимыми, значит $r(A)=2$.

При вычислении ранга матрицы методы можно комбинировать.

Любой не равный нулю минор матрицы, порядок которого совпадает с рангом матрицы, называется *базисным* минором.

Задачи

2.70. Найти ранг матриц:

$$a)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 3 & -6 & 5\end{pmatrix};\ b)\ A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 5 & 1 & 4\\ 1 & 7 & 2 & 3 & 0\\ 3 & 10 & 7 & 4 & 4\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix};\ c)\ A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix};$$

$$d)\ A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 1 & -1\\ -4 & -3 & 1\end{pmatrix};\ e)\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 1 & -1 & 3\\ 2 & 5 & 1 & 11\end{pmatrix}.$$

2.71. Расположить матрицы в порядке убывания их рангов:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 1\\ 4 & 5 & 6 & 1\\ 5 & 7 & 9 & 2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & -2 & -3 & -4\end{pmatrix}.$$

2.72. Сколько линейно независимых строк имеет матрица

$$C=(BA)^T+A^TB^T-D,\ \text{где}\ A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\\ 3 & 8\end{pmatrix}?$$

2.73. При каком значении параметра p матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1 & 2\\ 3 & 9 & 4 & 5\\ 9 & 5 & 9 & 7\\ 3 & 7 & 5 & p\end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг?

2.74. Определить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ в зависимости от числа a.

Задачи для самостоятельного решения

2.75. Найти ранг матрицы:

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix};\ b)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c)\ A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix};\ d)\ A=\begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}.$$

2.76. Найти ранг матрицы в зависимости от значений параметра λ:

$$a)\ A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix};\ b)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & \lambda & 0 \\ 3 & \lambda & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

2.77. Определить максимальное число линейно независимых строк матрицы:

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix};\ b)\ A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 10 & -4 \\ 1 & 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.78. При каком значении параметра p матрица $A=\begin{pmatrix} p & 1 & 2 & p \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ p & 1 & 1 & p \end{pmatrix}$

имеет наименьший ранг?

2.79. Найти значения λ, при которых матрица

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & \lambda^2-\lambda+1 & \lambda^2-\lambda-1 \\ 1 & -1 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$ имеет наименьший ранг.

3. Системы линейных алгебраических уравнений

3.1. Понятие систем линейных алгебраических уравнений

Совокупность соотношений вида:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1,\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2,\\
&...\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

называется *системой* из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$.

Числа a_{ij} называются коэффициентами системы, числа b_i – элементами правых частей.

Систему (3.1) можно представить в матричной форме:

$$AX = B, \tag{3.2}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$ – матрица размерности $m \times n$, составленная из коэффициентов при неизвестных,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец неизвестных,

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$ – вектор-столбец свободных членов.

Если к матрице A добавить столбец свободных членов, то получится матрица

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right),$$

называемая *расширенной матрицей* системы (3.1). Зная расширенную матрицу, можно однозначно выписать систему (3.1).

В векторной форме систему (3.1) можно представить

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \cdots + x_n a^n = B,$$

где $a^1, a^2, \ldots, a^n$ – векторы-столбцы матрицы A. Используя скалярное произведение векторов-строк $A_i,\ i = \overline{1,m}$ матрицы A на вектор-столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ переменных, систему (3.1) можно записать в виде:

$$\left(A^i, X\right) = b_i, \quad i = \overline{1,m}.$$

Совокупность чисел $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ которая при подстановке в (3.1) обращает все ее уравнения в тождества, называется *решением* системы.

Система (3.1) называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* – если она решений не имеет.

Совместная система (3.1) может иметь единственное решение или бесконечное множество решений.

Если система совместна, то каждое ее решение называется *частным*, совокупность всех частных решений называется *общим решением* системы.

Совместная система называется *определенной*, если она имеет только одно решение, если больше одного решения – *неопределенной*.

Система называется *неоднородной*, если среди элементов ее правых частей есть хотя бы один отличный от нуля, иначе она называется *однородной*.

Две системы уравнений называются *эквивалентными* (равносильными), если совпадают множества решений этих систем.

3.2. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим системы, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных $(m = n)$ и определитель матрицы A отличен от нуля.

1) *Метод Крамера*

Если система $AX = B$ такова, что A – квадратная невырожденная матрица, то существует единственное решение $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ этой системы, где

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = 1,2,..., n, \tag{3.3}$$

где $\Delta = |A| \neq 0$, Δ_j – определитель, полученный путем замены в определителе матрицы A j-го столбца столбцом свободных членов B, т.е.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

***Пример* 3.1.** Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{aligned} &3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 1, \\ &2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ &x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{aligned}$$

Решение. Выпишем все компоненты системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система состоит из трех уравнений и трех переменных, значит, матрица A– квадратная. Проверим, является ли матрица A невырожденной, вычислим определитель

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - 5 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= 27 + 4 + 20 - 15 - 24 - 6 = 6,$$

$\Delta = 6 \neq 0$, следовательно, матрица A – невырожденная, система имеет единственное решение.

Найдем определители Δ_j, $j = 1,2,3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 3 + 4\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 5 - 5\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 3 - 1\cdot 2\cdot 1 =$$

$$= 9 + 4 + 20 - 15 - 24 - 2 = -8,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 2\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 5 - 5\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= 18 + 1 + 10 - 10 - 6 - 3 = 10,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot 1 + 4\cdot 2\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 - 1\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 =$$

$$= 9 + 8 + 4 - 3 - 8 - 12 = -2.$$

Находим значения переменных по формуле (3.3):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-8}{6} = -\frac{4}{3},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3},\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Чтобы убедиться в том, что решение $X = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ найдено верно, сделаем проверку:

$$A\cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 4\cdot\frac{5}{3} + 5\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 2\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 3\cdot\frac{5}{3} + 1\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \\ 1\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + 2\cdot\frac{5}{3} + 3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12+20-5}{3} \\ \frac{-8+15-1}{3} \\ \frac{-4+10-3}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{3} \\ \frac{6}{3} \\ \frac{3}{3} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix} -\dfrac{4}{3} \\ \dfrac{5}{3} \\ -\dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Задачи

3.1. Решить системы методом Крамера:

$$a)\begin{cases} 6\text{x}_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+3x_2+3x_3=1, \\ 4x_1+2x_2=-1. \end{cases} b)\begin{cases} 2x_1+x_2=5, \\ x_1+3x_3=16, \\ 5x_2-x_3=10. \end{cases} c)\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16, \\ 5x_1+2x_2+x_3=16. \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} x_1+2x_2=10, \\ 3x_1+2x_2+x_3=23, \\ x_2+2x_3=13. \end{cases} e)\begin{cases} 5x_1+8x_2+x_3=2, \\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7, \\ 2x_1+x_2-x_3=-5. \end{cases} f)\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3=3, \\ 5x-2x_2-2x_3=3, \\ x_1+x_2-x_3=-2. \end{cases}$$

3.2. По предписанию врача пациенту необходимо перейти на диету и за сезон употребить питательных веществ, содержащихся во фруктах и ягодах, в количествах, указанных в таблице.

Вещества	Содержание питательных веществ в 1 кг фруктов			Нормы потребления, г
	клубника	яблоки	смородина	
p_1	3	2	1	30
p_2	1	3	4	70
p_3	1	0	1	20

Определите, какое количество фруктов каждого вида необходимо купить за сезон, чтобы выполнить предписание врача.

3.3. Три бригады обработали три участка поля. Площади участков и затраты на времени на их обработку представлены в таблице

Участок	Время работы бригады, ч			Площадь участка, га
	1	2	3	
1	2	3	1	10
2	1	5	4	19
3	4	1	3	18

Найти производительность каждой бригады.

3.4. Цех выпускает три вида изделий: I, II и III. При этом применяются три производственных процесса: штамповка, сборка и окраска. Ресурсы труда человеко-часах по каждому из процессов составляет соответственно 40, 40 и 80, а трудоемкость каждого процесса при производстве единицы продукции задается матрицей

$$A=[a_{ij}]=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – число человеко-часов, требующееся для i-й стадии обработки единицы изделия j-го вида. Представьте в матричной форме уравнения, характеризующие равенство используемых и имеющихся ресурсов для каждого процесса. Пусть мощности каждого вида обработки используются полностью. Каков будет при этом выпуск каждого вида продукции?

Задачи для самостоятельного решения

3.5. Решить системы методом Крамера:

$$a)\ \begin{cases} 7x_1+2x_2+3x_3=15, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=15, \\ 10x_1-11x_2+5x_3=36. \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} 3x_1-x_2+x_3=14, \\ x_1-4x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1+5x_2-x_3=27. \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x_1-x_2+x_3=5, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=10, \\ 5x_1-9x_2-4x_3=34. \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 3x_1-4x_2-2x_3=-6, \\ 5x_1-x_2+x_3=6, \\ x_1-2x_2+7x_3=37. \end{cases} \quad e)\begin{cases} 7x_1-6x_2-2x_3=24, \\ x_1-8x_2+x_3=6, \\ 3x_1+4x_2-8x_3=-4. \end{cases} \quad f)\ \begin{cases} 5x_1+2x_2+x_3=-9, \\ -3x_1+4x_2-6x_3=-11, \\ x_1-x_2+3x_3=8. \end{cases}$$

3.6. Для изготовления трех видов изделий A, B, C предприятие использует три вида сырья: 1, 2 и 3. Нормы расхода сырья на производство одного изделия и общее количество сырья указаны в таблице

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Общее количество сырья
	A	*B*	*C*	
1	2	1	1	45
2	1	1	2	40
3	1	0	1	15

a) Записать математическую модель задачи.

b) Сколько изделий каждого вида может выпустить предприятие?

c) Рассчитать суммарную выручку предприятия от продажи продукции, если цена за 1 изделие соответственно равна P = (140; 250; 180) р.

3.7. Фирма состоит из двух отделений, суммарная величина прибыли которых в минувшем году составила 12 млн усл. ед. На этот год запланировано увеличение прибыли первого отделения 70 %, второго – 40 %. В результате суммарная прибыль должна вырасти в 1,5 раза. Какова величина прибыли каждого из отделений: a) в минувшем году; b) в этом году?

2) *Метод обратной матрицы*

Применяется, как и метод Крамера, если $m = n$ и $|A| \neq 0$.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений в матричной форме (3.2) $AX = B$, умножим слева обе части уравнения на A^{-1}, получим

$$A^{-1}AX = A^{-1}B$$

или

$$X = A^{-1}B. \tag{3.4}$$

Уравнение в матричной форме решено. Для нахождения координат вектора X следует найти обратную матрицу для A и умножить ее на столбец свободных членов B.

***Пример* 3.2.** Решить систему уравнений методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 17, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = 11. \end{cases}$$

Решение. Составим матрицу коэффициентов $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, она невырожденная $(|A| = -10 \neq 0)$, имеет обратную матрицу (см. пример 2.11)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (3.4) находим решение системы уравнений

$$X = \begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 17 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 + 22{,}1 - 12{,}1 \\ 5 - 8{,}5 + 5{,}5 \\ -8 + 18{,}7 - 7{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задачи

3.8. Решить системы уравнений методом обратной матрицы

$$a)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 = 7, \\ 7x_1 + 3x_2 - x_3 = 25. \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -6, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 8x_1 + 6x_2 - x_3 = 21. \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = -10, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 = -13, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 13. \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 = -25, \\ -x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases} \quad e)\ \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 = -6, \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ 6x_1 - 3x_2 - 7x_3 = -8. \end{cases} \quad f)\ \begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 17, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

3.9. На звероферме выращиваются песцы, черно-бурые лисы и норки. Для их питания используются три вида кормов. В таблице приведены нормы расхода кормов, а также их ресурс в расчете на день.

Вид корма	Норма расхода кормов, кг / день			Ресурс кормов, кг
	песец	лиса	норка	
I	1	2	2	340
II	2	4	1	440
III	3	1	2	500

Определите, сколько и каких зверьков выращивается на ферме.

3.10. На кондитерскую фабрику перед Новым годом поступили заказы на подарочные наборы конфет. Возможные варианты наборов, их стоимость и оставшиеся товарные запасы на фабрике представлены в таблице.

Наименование конфет	Вес конфет в наборе, кг			Запасы конфет, кг
	A	*B*	*C*	
«Сникерс»	0,3	0,2	0,4	600
«Марс»	0,2	0,3	0,2	700
«Баунти»	0,2	0,1	0,1	300

Определите количество подарочных наборов, которые можно сформировать из оставшихся запасов.

3.11. Туристическое агентство заказало издательству выпуск художественных альбомов трех типов *A, B, C*. Затраты ресурсов приведены в таблице.

Вид ресурса	Удельные затраты ресурсов на выпуск 1 альбома		
	A	*B*	*C*
Финансы (дол.)	2	1	4
Бумага (листы)	40	20	20
Трудозатраты (чел. ч)	1	1	2

3.12. Издательство для выполнения заказа собирается затратить 3 400 дол., 50 000 листов бумаги и 2 100 чел. ч. Сколько альбомов каждого типа заказано издательству?

Задачи для самостоятельного решения

3.13. Решить системы уравнений методом обратной матрицы

$$a)\ \begin{cases} 2x_1 - 3x_3 + x_3 = -7, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ x_1 - 4x_2 = -5. \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases} \quad c)\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

$$d)\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases} \quad e)\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases} \quad f)\ \begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -3, \\ -x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$$

3.14. Нормы затрат производственных мощностей цеха на единицу различных видов изделий представлены в таблице.

Ресурсы	Нормы затрат на одно изделие		
	1	2	3
Оборудование, ч	2	3	4
Сырье, кг	1	4	5
Электроэнергия, кВт · ч	3	4	3

Задан вектор $B = (21;22;22)$ производственных мощностей цеха. Определить план выпуска изделий $x = (x_1; x_2; x_3)$ в предположении, что производственные мощности цеха используются полностью

3.15. Цех выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор первого вида расходуется 5 кг трансформаторного железа и 3 кг проволоки, на один трансформатор второго вида – 3 кг железа и 2 кг проволоки. Вывести расчетную формулу, по которой можно определить количество изготовленных трансформаторов каждого вида, зная количество израсходованного железа C_1 и проволоки C_2. Провести расчет при $C_1 = 37$ кг, $C_2 = 23$ кг.

3) *Метод Гаусса (последовательных исключений неизвестных*)

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных с помощью элементарных преобразований. Разрешается использовать следующие преобразования:

1) Переставлять местами уравнения системы;
2) Умножать любое уравнение системы на число, не равное нулю;
3) Прибавлять к уравнению системы другое уравнение, умноженное на число.

Эти преобразования называются *эквивалентными*, так как они переводят систему линейных алгебраических уравнений в систему, эквивалентную ей.

Если в системе (3.1) $a_{11} \neq 0,$ то оставим первое уравнение без изменения. Исключим переменную x_1 из всех уравнений системы, кроме первого. Для этого умножим первое уравнение на $\left(-\frac{a_{21}}{a_{11}}\right)$ и сложим со вторым уравнением, умножим на $\left(-\frac{a_{31}}{a_{11}}\right)$ и сложим с третьим уравнением и т.д. Таким образом, переменная x_1 будет исключена из всех уравнений, кроме первого. Первое уравнение дальнейшим преобразованиям не подвергается.

Если $a_{22} \neq 0,$ то оставим второе уравнение без изменения. Исключим переменную x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго. Для этого умножим второе уравнение на $\left(-\frac{a_{32}}{a_{22}}\right)$ и сложим с третьим уравнением, умножим на $\left(-\frac{a_{42}}{a_{22}}\right)$ и сложим с четвертым уравнением и т.д. Таким образом, переменная x_2 будет исключена из всех уравнений, кроме первого и второго. Второе уравнение дальнейшим преобразованиям не подвергается.

Подобным образом исключаем переменную x_3 и т.д.

Если в ходе преобразований получено уравнение, в котором все коэффициенты при переменных равны 0, а свободный член отличен от 0, то исходная система линейных алгебраических уравнений несовместна.

Если в ходе преобразований получено уравнение, в котором все коэффициенты при переменных равны 0, и свободный член равен 0, то это уравнение в дальнейшем можно опускать, преобразуя оставшиеся уравнения.

Если в ходе преобразований удалось привести исходную систему к «треугольному» виду:

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1, \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ a'_{nn}x_n &= b'_n, \end{aligned}$$

где $a'_{11}, a'_{22}, \ldots, a'_{nn} \neq 0,$ то она имеет единственное решение, которое легко найти, решая последовательно уравнения, начиная с последнего и постепенно поднимаясь вверх к первому.

Чтобы укоротить запись, описанные преобразования осуществляют не над уравнениями системы, а над строками расширенной матрицы системы.

***Пример* 3.3.** Найти решение системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&5x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1,\\
&x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 5,\\
&-3x_1 + 5x_2 + 2x_3 - x_4 = -3,\\
&2x_1 + 6x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -3.
\end{aligned}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right).$$

Приведем ее к треугольному виду: сначала выберем рабочую строку, с помощью которой будем получать нули в одном из столбцов матрицы. Удобнее всего взять строку с 1, т.е. вторую строку, которую поменяем местами с первой строкой:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ -3 & 5 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & -2 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & 6 & -3 & -4 & -3 \end{array}\right) \sim$$

С помощью 1-й строки получим нули в первом столбце, выполнив следующие действия:

– первую строку умножим на (–5) и прибавим ко второй строке;

– первую строку умножим на 3 и прибавим к третьей строке;

– первую строку умножим на (–2) и прибавим к четвертой строке, получим

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 13 & -22 & -17 & -24 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 10 & -11 & -10 & -13 \end{array}\right) \sim$$

– третью строку поменяем местами со второй и с помощью (–1) получим нули во втором столбце вместо 13 и 10, для этого новую вторую строку умножим:

– на 13 и прибавим к третьей строке;

– на 10 и прибавим к четвертой строке:

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 13 & -22 & -17 & -24 \\ 0 & 10 & -11 & -10 & -13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 160 & 87 & 132 \\ 0 & 0 & 129 & 70 & 107 \end{array}\right) \sim$$

Теперь возникла сложная ситуация, когда ни в третьей, ни в четвертой строке нет 1 или –1. Тогда, чтобы в четвертой строке получить ноль, сделаем следующее: третью строку умножим на (–129), а четвертую на 160, и затем складываем эти строки, результат запишем в четвертую строку, а третью оставим в первоначальном виде:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & -20640 & -11223 & -17028 \\ 0 & 0 & -20640 & 11200 & 17120 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 4 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 14 & 8 & 12 \\ 0 & 0 & 160 & 87 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & -23 & 92 \end{array}\right).$$

Таким образом, мы привели матрицу к треугольному виду. Так как $a'_{11}, a'_{22}, a'_{33}, a'_{44} \neq 0,$ система имеет единственное решение. Восстановим систему уравнений из полученной матрицы:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 5, \\ -x_2 + 14x_3 + 8x_4 &= 12, \\ 160x_3 + 87x_4 &= 132, \\ -23x_4 &= 92. \end{aligned}$$

Из последнего уравнения найдем значение x_4 и подставим его в третье уравнение:

$$-23x_4 = 92 \Rightarrow x_4 = \frac{92}{-23} = -4,$$

$$160x_3 + 87\cdot(-4) = 132, \Rightarrow 160x_3 - 348 = 132, \Rightarrow 160x_3 = 132 + 348 = 480,$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{480}{160} = 3,$$

$$-x_2 + 14\cdot 3 + 8\cdot(-4) = 12, \Rightarrow -x_2 + 42 - 32 = -x_2 + 10 = 12, \Rightarrow x_2 = -2,$$

$$x_1 - 2\cdot(-2) + 4\cdot 3 + 3\cdot(-4) = 5, \Rightarrow x_1 + 4 + 12 - 12 = x_1 + 4 = 5, \Rightarrow x_1 = 5 - 4 = 1.$$

Решение системы: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Сделаем проверку:

$$AX = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ -3 & 5 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-6-6+8 \\ 1+4+12-12 \\ -3-10+6+4 \\ 2-12-9+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}1\\-2\\3\\-4\end{pmatrix}.$

Если систему удалось преобразовать к «трапециевидному» виду

$$\begin{aligned}
a'_{11}x_1+a'_{12}x_2+...+a'_{1r}x_r+a'_{1r}x_{r+1}+\ldots+a'_{1n}x_n&=b'_1,\\
a'_{22}x_2+...+a'_{2r}x_r+a'_{2r}x_{r+1}+\ldots+a'_{2n}x_n&=b'_2,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\
a'_{rr}x_r+a'_{rr+1}x_{r+1}+\ldots+a'_{rn}x_n&=b'_r,
\end{aligned}$$

где $a'_{11},a'_{22},\ldots,a'_{rr}\neq 0,\;\; r<n,$ то она имеет бесконечное множество решений, которые объединяются в общее решение системы. Переменные $x_{r+1},\ldots,x_n$ переносятся в правую часть уравнений и объявляются *свободными* (они могут принимать различные числовые значения). Переменные $x_1,\ldots,x_r$ *–базисными*, они выражаются через свободные переменные, для этого уравнения укороченной системы решаются относительно базисных переменных $x_1,\ldots,x_r$, начиная с нижнего и поднимаясь вверх.

***Пример* 3.4.** Найти решение системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&2x_1-x_2+3x_3+4x_4=-1,\\
&x_1+2x_2-3x_3+x_4=2,\\
&5x_1-5x_2+12x_3+11x_4=-5,\\
&x_1-3x_2+6x_3+3x_4=-3.
\end{aligned}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}2&-1&3&4&-1\\1&2&-3&1&2\\5&-5&12&11&-5\\1&-6&6&3&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\2&-1&3&4&-1\\5&-5&12&11&-5\\1&-6&6&3&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\0&-5&9&2&-5\\0&-15&27&6&-15\\0&-5&9&2&-5\end{array}\right)\sim$$

Третью строку сократим на общий множитель 3 и вычтем из нее вторую строку, из четвертой строки вычтем вторую строку:

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\0&-5&9&2&-5\\0&-5&9&2&-5\\0&-5&9&2&-5\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\0&-5&9&2&-5\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&2&-3&1&2\\0&-5&9&2&-5\end{array}\right).$$

Нулевые строки расширенной матрицы можно опустить. Переменные x_1 и x_2 объявляем базисными, а свободными x_3 и x_4. Восстановим систему уравнений и перенесем свободные переменные в правые части уравнений с противоположным знаком:

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 0x_1 - 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 = -5, \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ \quad - 5x_2 + 9x_3 + 2x_4 = -5, \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 3x_3 - x_4 + 2, \\ \quad - 5x_2 = -9x_3 - 2x_4 - 5, \end{array}$$

Обозначим свободные переменные $x_3 = c_1$ и $x_4 = c_2$, тогда

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 = 3c_1 - c_2 + 2, \\ \quad - 5x_2 = -9c_1 - 2c_2 - 5, \end{array} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{l} x_2 = \dfrac{-9c_1 - 2c_2 - 5}{-5} = \dfrac{9}{5}c_1 + \dfrac{2}{5}c_2 + 1, \\ x_1 + 2 \cdot \left(\dfrac{9}{5}c_1 + \dfrac{2}{5}c_2 + 1 \right) = 3c_1 - c_2 + 2, \end{array} \Rightarrow$$

$$x_2 = \frac{9}{5}c_1 + \frac{2}{5}c_2 + 1,$$

$$x_1 + \frac{18}{5}c_1 + \frac{4}{5}c_2 + 2 = 3c_1 - c_2 + 2, \Rightarrow x_1 = -\frac{18}{5}c_1 - \frac{4}{5}c_2 - 2 + 3c_1 - c_2 + 2, \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{-18+15}{5}c_1 + \frac{-4-5}{5}c_2 = \frac{-3}{5}c_1 - \frac{9}{5}c_2,$$

$$x_1 = -\frac{3}{5}c_1 - \frac{9}{5}c_2.$$

Общее решение системы запишем в виде:

$$X = \begin{pmatrix} -\dfrac{3}{5}c_1 - \dfrac{9}{5}c_2 \\ \dfrac{9}{5}c_1 + \dfrac{2}{5}c_2 + 1 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Константы c_1, c_2 принимают произвольные значения. Если им задать конкретные числовые значения, то можно найти частное решение системы:

$$X_{ч} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5}\cdot 5 - \frac{9}{5}\cdot 10 \\ \frac{9}{5}\cdot 5 + \frac{2}{5}\cdot 10 + 1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-18 \\ 9+4+1 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21 \\ 14 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

***Пример* 3.5.** Найти решение системы уравнений:

$$\begin{aligned} &4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 6x_4 + x_5 = 2, \\ &2x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 - 6x_5 = 3, \\ &2x_1 - 16x_2 + 19x_3 - 15x_4 + 20x_5 = 7. \end{aligned}$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу системы и приведем ее к треугольному виду:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & -2 & 5 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 2 & -16 & 19 & -15 & 20 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & -6 & 1 & 2 \\ 2 & -16 & 19 & -15 & 20 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 11 & -8 & 13 & -4 \\ 0 & -20 & 22 & -16 & 26 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 11 & -8 & 13 & -4 \\ 0 & -10 & 11 & -8 & 13 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -3 & 1 & -6 & 3 \\ 0 & -10 & 11 & -8 & 13 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Система не совместна, так как последняя строка расширенной матрицы равносильна уравнению $0 = -6$.

Преимущества метода Гаусса по сравнению с методами обратной матрицы и Крамера, состоят в том, что он применим к любой системе (3.1), позволяет исследовать ее совместность и в случае совместности найти решение.

***Пример* 3.6.** Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -5, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 = -7 \end{cases}$$

a) методом обратной матрицы;

b) методом Крамера,

c) методом Гаусса.

Решение. *a*) Составим матрицу коэффициентов $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, она невырожденная ($|A|=-10\neq 0$), имеет обратную матрицу (см. пример 2.11)

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix}.$$

По формуле (3.4) находим решение системы уравнений

$$X=\begin{pmatrix} -1{,}8 & 1{,}3 & -1{,}1 \\ 1 & -0{,}5 & 0{,}5 \\ -1{,}6 & 1{,}1 & -0{,}7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1{,}8-6{,}5+7{,}7 \\ -1+2{,}5-3{,}5 \\ 1{,}6-5{,}5+4{,}9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Вычислим $\Delta=|A|=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}=40-1-18-15-4-12=-10\neq 0,$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -5 & 5 & 2 \\ -7 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-20+5-42-35+2+60=-30,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 2 \\ -3 & -7 & 4 \end{vmatrix}=-40+7+6+15+28+4=20,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & -5 \\ -3 & 1 & -7 \end{vmatrix}=-70-1+45-15+10+21=-10,$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-30}{-10}=3,\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{20}{-10}=-2,\; x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-10}{-10}=1.$$

c) Приведем расширенную матрицу к треугольному виду:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & -5 \\ -3 & 1 & 4 & -7 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & -7 & -5 & 9 \\ 0 & 16 & 10 & -22 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 2 & -5 \\ 0 & 7 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & -10 & -10 \end{array}\right),$$

Запишем укороченную систему:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = -5, \\ \quad 7x_2 + 5x_3 = -9, \\ \quad\quad -10x_3 = -10, \end{cases}$$

решая которую снизу вверх, последовательно найдем $x_3 = 1$, $x_2 = (-9 - 5) : 7 = -2$, $x_1 = -5 - 2 + 10 = 3$.

Задачи

3.15. Решить системы уравнений методом Гаусса:

a) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 9, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 4x_1 + x_2 = -2, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -7, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 22, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 47, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 18. \end{cases}$

g) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$ *h)* $\begin{cases} -6x_1 + 9x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2, \\ -4x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$ *i)* $\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases}$

3.16. Фирмой было выделено 236 тыс. усл. ед. для покупки 29 предметов для оборудования офиса: несколько компьютеров по цене 20 тыс. усл. ед. за компьютер, офисных столов по 8,5 тыс. усл. ед. за стол, стульев по 1,5 тыс. усл. ед. за стул. Позже выяснилось, что в другом месте компьютеры можно приобрести по 19,5 тыс. усл. ед., а столы – по 8 тыс. усл. ед. (стулья по той же цене), благодаря чему на ту же сумму было куплено на 1 стол больше. Выяснить, какое количество единиц каждого вида оборудования было приобретено.

3.17. Предприятие выпускает три вида продукции: *A*, *B* и *C*. Уровень выпуска лимитируется ограниченностью имеющихся ресурсов: сырья, материалов и оборудования. Числовые данные задачи указаны в таблице:

Ресурсы	Запасы ресурсов	Нормы затрат ресурсов на одно изделие продукции вида		
		A	*B*	*C*
Сырье, кг	24	5	7	4
Материалы, кг	75	10	5	20
Оборудование, ед.	10	5	2	1

Определить объем выпуска продукции каждого вида, предполагая полное использование ресурсов.

3.18. Из пункта A в пункт B нужно перевести оборудование трех типов в количестве: 1-го – 95 ед., 2-го – 100 ед., 3-го – 185 ед. Для перевозки оборудования используется три вида транспорта. Задана матрица грузоподъемности транспорта: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, где a_{ij} – количество единиц оборудования i-го типа, размещаемых при перевозке в каждой единице j-го вида транспорта. Сколько единиц транспорта каждого вида должен заказать завод при условии полного его использования для перевозки оборудования?

3.19. Предприятие использует три вида сырья, выпуская два вида продукции. В таблице приведены данные производства в условных единицах затрат на производство одного изделия. Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции		Запас сырья
	Продукция 1	Продукция 2	
1	2	3	8 000
2	1	4	9 000
3	5	2	7 000

Задачи для самостоятельного решения

3.20. Решить системы уравнений методом Гаусса:

$$a)\ \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -3, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_4 = -3, \\ x_1 - x_2 - 4x_3 + 9x_4 = 22. \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 6, \\ 3x_1 + 2x_3 = 1. \end{cases} \quad d)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -5, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 3. \end{cases} \quad e)\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$$

$$f)\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases} \quad g)\ \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7, \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

$$h)\ \begin{cases} x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 6x_4 = 8. \end{cases}$$

3.21. Из листового материала необходимо скроить 360 заготовок типа *A*, 300 заготовок типа *B*, 675 – типа *C*. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице

Тип заготовки	Количество заготовок на один лист при способах раскроя		
	1	2	3
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Сколько листов материала будет раскроено каждым из трех способов для выполнения задания?

3.22. Обувная фабрика выпускает четыре вида продукции: мужскую обувь, женскую обувь, детскую обувь и изделия по уходу за обувью. В таблице приведены данные производства в усл. ед. затрат на производство одного изделия.

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции				Запас сырья
	Мужская обувь	Женская обувь	Детская обувь	Изделия по уходу за обувью	
1	20	10	10	0	5 000
2	30	40	20	1	12 000
3	20	60	10	1	11 000
4	10	50	5	0	7 000

Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

3.3. Исследование совместности систем линейных алгебраических уравнений

Теорема (Кронекера-Капелли). Для того чтобы система (3.1) была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы *A* был равен рангу расширенной матрицы

$$r(A) = r(\overline{A}) = r \qquad (3.5)$$

Если систему (3.1) представить в векторной форме

$$x_1 a^1 + x_2 a^2 + \dots + x_n a^n = B,$$

то можно сказать, что система имеет хотя бы одно решение в том и только том случае, когда вектор *B* есть линейная комбинация векторов $a^1, a^2, \dots, a^n$, а это значит, что число линейно независимых столбцов обеих матриц одинаково.

Равенство (3.5) означает, что r строк матриц линейно независимы, а остальные $(m-r)$ строк $(m-r>0)$ являются их линейными комбинациями, или $(m-r)$ уравнений системы являются линейными комбинациями остальных.

Пусть M_r – некоторый минор r-го порядка, не равный 0. Этот минор называется *базисным*. Отбросим $(m-r)$ уравнений системы, коэффициенты которых не вошли в базисный минор и получим укороченную систему. Переменные, коэффициенты которых вошли в базисный минор, объявляем за базисные, остальные $(n-r)$ за свободные и переносим их в правые части уравнений с противоположным знаком. Укороченная система содержит r уравнений с r базисными переменными, поскольку $M_r \neq 0$, то эту систему можно решить, например, методом Крамера. В результате решения базисные переменные будут выражены через свободные, которые могут принимать различные числовые значения и записывают общее решение системы.

***Пример* 3.7.** Исследовать совместность и найти общее решение системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 8, \\ 5x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 15. \end{cases}$$

Решение. Для нахождения рангов используем метод окаймляющих миноров. Выберем минор 2-го прядка $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$ пересчитаем окаймляющие его миноры 3-го порядка $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \\ 5 & -3 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = 2,$

$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \\ 5 & -3 & 15 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow r(\overline{A}) = 2,$ так как ранги совпадают по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

В качестве базисного минора выберем $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$ переменные x_1, x_2 объявляем за базисные, x_3 – за свободную переменную и переносим ее в правую часть уравнений. Оставляем первое и второе уравнения, третье – отбрасываем. Получаем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 + 2x_3, \\ 3x_1 - x_2 = 8 - 3x_3, \end{cases}$$

которую решаем методом Крамера:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1+2x_3 & 1 \\ 8-3x_3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-2x_3-8+3x_3}{-4} = \frac{-9+x_3}{-4} = -\frac{1}{4}x_3 + \frac{9}{4},$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1+2x_3 \\ 3 & 8-3x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{8-3x_3-3-6x_3}{-4} = \frac{5-9x_3}{-4} = \frac{9}{4}x_3 - \frac{5}{4},$$

Положим $x_3 = C$ и запишем общее решение системы $X(C) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4}C + \frac{9}{4} \\ \frac{9}{4}C - \frac{5}{4} \\ C \end{pmatrix}.$

Из теоремы Кронекера-Капелли следуют заключения:

1. Система уравнений несовместна (не имеет решения), если $r(A) \neq r(\overline{A})$.

2. Система уравнений имеет единственное решение, если $r = m = n$, т.е. ранг матриц совпадает с числом уравнений и числом переменных системы.

Это решение можно найти по любому из методов, описанных в пункте 3.2.

3. Система уравнений имеет бесконечное множество решений (общее решение), если $r \leq \min(m, n)$. Это решение можно найти методом Гаусса или с использованием базисного минора как примере 3.7.

Задачи

3.23. Исследовать совместность, найти общее решение и одно частное решение следующих систем уравнений:

a) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 5, \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 9x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 4. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 2, \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 = 5, \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 = -1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 4x_4 + 15x_5 = 9, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 5. \end{cases}$

3.24. Два садоводства поставляют томаты в три овощных магазина. Данные о затратах (в р.) на перевозку одной тонны томатов, спросе и предложении приведены в таблице

Номер садоводства	Стоимость перевозки одной тонны томатов в магазин			Предложение садоводств
	I	II	III	
I	3	7	6	24
II	4	8	2	26
Спрос магазинов	10	20	10	

Составить математическую модель задачи, при котором транспортные расходы составляют 196 р.

3.25. Исследовать систему уравнений относительно параметра α и найти общее решение

$$\begin{cases} -x_1+3x_2-4x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+\alpha x_3=1, \\ -x_2+3x_3=-1. \end{cases}$$

3.26. Задана матрица удельной эксплуатации трёх машин:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – время в часах эксплуатации i – й машины при изготовлении одного изделия j-го вида. Каждая машина работает непрерывно 8 ч.

а) Составить математическую модель задачи для определения плана выпуска изделий указанных видов, при котором полностью используется рабочее время каждой машины.

б) Решить систему уравнений в предположении, что неизвестные могут принимать только целые неотрицательные значения.

Задачи для самостоятельного решения

3.27. Исследовать совместность, найти общее решение и одно частное решение следующих систем уравнений:

a) $\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3-3x_4=1, \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=2. \end{cases}$

b) $\begin{cases} 5x_1+12x_2+5x_3+3x_4=10, \\ 4x_1+3x_2+x_3+3x_4=2, \\ 11x_1+11x_2+4x_3+8x_4=8. \end{cases}$

c) $\begin{cases} x_1-x_2-3x_3-4x_4=1, \\ 2x_1-2x_2+2x_3+3x_4=2, \\ -x_1+x_2-13x_3-18x_4=-1. \end{cases}$

d) $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3+x_4=6, \\ 7x_1+5x_2-7x_3-x_4=8, \\ x_1+8x_2-18x_3-5x_4=-6. \end{cases}$

e) $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=2, \\ 4x_1+4x_2-4x_3=5, \\ -x_1-5x_2+7x_3=-1. \end{cases}$

f) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 2x_1+3x_2+4x_3=0, \\ 2x_1+x_2+x_3=1, \\ 2x_1+2x_2+3x_3=1. \end{cases}$

3.28. Найти решение системы в зависимости от параметра a:

$$a)\ \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + ax_3 = 1. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1+a)x_2 + x_3 = a, \\ x_1 + x_2 + (1+a)x_3 = a^2. \end{cases}$$

3.29. Предприятие выпускает 4 вида продукции из 3 видов сырья. Задана матрица удельных расходов сырья:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

где a_{ij} – количество единиц сырья j-го вида, потребляемого при выпуске одной единицы продукции j-го вида.

Сколько единиц продукции каждого вида выпускает предприятие, если наличные ресурсы сырья соответственно 35, 30 и 30 кг используются полностью?

3.30. В хозяйстве установили, что откорм животных выгоден тогда, когда животное будет получать в дневном рационе 11 ед. питательного вещества A, 21 ед. питательного вещества B и 18 ед. питательного вещества C. Для откорма животных используют четыре вида кормов. В таблице указано содержание питательных веществ в 1 кг каждого вида кормов и цена 1 кг кормов:

Виды питательных веществ	Содержание питательных веществ в 1 кг				Норма питательных веществ
	1	2	3	4	
A	1	2	1	1	11
B	3	2	1	3	21
C	0	4	3	2	18
Цена 1 кг кормов	3	5	4	3	

Составить рацион питания животных стоимостью 36 р., содержащий суточную норму питательных веществ.

3.4. Однородные системы линейных уравнений

Если в системе (3.1) $b_1 = b_2 = \ldots = b_m = 0,$ то система называется однородной и в матричной форме имеет вид:

$$AX = 0. \qquad (3.6)$$

По теореме Кронекера-Капелли система (3.6) всегда совместна, так как соотношение (3.5) выполняется очевидным образом (нулевой столбец B не может изменить ранг матрицы A).

Если для однородной системы $r(A) = r$ и число переменных равно n, то система (3.6) имеет единственное (тривиальное) решение $X = 0$ в случае $r = n$.

Если $n > r$, то система (3.6) имеет бесконечное множество решений (при $m = n$ условие $|A| = 0$).

Если векторы $\overline{X}$ и $\overline{\overline{X}}$ – некоторые решения системы (3.6), т.е. если $A\overline{X}=0$, $A\overline{\overline{X}}=0$, то $A(C\overline{X})=A(C\overline{\overline{X}})=0$, $A(\overline{X}+\overline{\overline{X}})=0$, где C – произвольное действительное число. Таким образом, если складывать векторы $\overline{X}$ и $\overline{\overline{X}}$, умножать их на произвольное число, то опять получим решения системы (3.6).

Линейно независимые векторы решений однородной системы (3.6), из которых можно с помощью операции сложения и умножения на число получить все решения, называются *фундаментальными* векторами или *фундаментальной системой* векторов. Выбор фундаментальной системы не единственен, число фундаментальных векторов равно $n-r$.

Для того, чтобы решить однородную систему уравнений можно воспользоваться следующим планом:

1. С помощью методов, описанных в 2.5 определить ранг матрицы A.

2. Пусть $r(A)=r$, выбираем базисный минор $M_r \neq 0$, r уравнений системы оставляем, остальные $m-r$ уравнений отбрасываем, переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ объявляем за базисные, остальные $n-r$ – за свободные переменные.

3. Решаем укороченную систему, например методом Крамера и записываем общее решение исходной системы.

4. Полагаем $C_1=1, C_2=0, \ldots, C_{n-r}=0$ находим фундаментальный вектор $\overline{X}$, $C_1=0, C_2=1, \ldots, C_{n-r}=0$ находим фундаментальный вектор $\overline{\overline{X}}$ и т.д.

***Пример* 3.8.** Найти общее решение и фундаментальную систему векторов системы уравнений:

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-3x_4=0, \\ x_1+x_2-x_3-x_4=0, \\ x_1-8x_2+5x_3-7x_4=0. \end{cases}$$

Решение:

1. Выпишем матрицу коэффициентов $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -8 & 5 & -7 \end{pmatrix}$, найдем ее ранг с помощью метода окаймляющих миноров. Выберем минор $M_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, пересчитаем окаймляющие его миноры 3-го порядка

$$M_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & 5 \end{vmatrix}=0, \quad M_3=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -8 & -7 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow r(A)=2.$$

2. В качестве базисного минора выберем $M_2=\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$, оставляем 1 и 2-е

уравнения, 3-е – отбрасываем, переменные x_1, x_2 – базисные, x_3, x_4 – свободные.

3. Записываем укороченную систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 3x_4 - x_3, \\ x_1 + x_2 = x_4 + x_3. \end{cases}$$

Решаем ее методом Крамера

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3x_4 - x_3 & -2 \\ x_4 + x_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3x_4 - x_3 + 2x_4 + 2x_3}{3} = \frac{x_3 + 5x_4}{3} = \frac{1}{3}x_3 + \frac{5}{3}x_4,$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3x_4 - x_3 \\ 1 & x_4 + x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{x_4 + x_3 - 3x_4 + x_3}{3} = \frac{2x_3 - 2x_4}{3} = \frac{2}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4.$$

Обозначим $x_3 = C_1, x_4 = C_2,$ тогда обще решение системы имеет вид:

$$X(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}C_1 + \frac{5}{3}C_2 \\ \frac{2}{3}C_1 - \frac{2}{3}C_2 \\ C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

4. Пусть $C_1 = 1, C_2 = 0,$ найдем фундаментальный вектор $\overline{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$ пусть $C_1 = 0, C_2 = 1,$ найдем фундаментальный вектор $\overline{\overline{X}} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Векторы $\overline{X}$ и $\overline{\overline{X}}$ образуют фундаментальную систему векторов и общее решение можно записать в виде $X(C_1, C_2) = C_1\overline{X} + C_2\overline{\overline{X}}$.

Задачи

3.4. Найти общее решение и фундаментальную систему решений:

a) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ 11x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

f) $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$ *g)* $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0. \end{cases}$

3.5. Определить значения параметра a, при котором система уравнений имеет нетривиальное решение и найти его:

a) $\begin{cases} a^2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ ax_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 7x_3 = 0, \\ x_1 + ax_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Задачи для самостоятельного решения

3.6. Найти общее решение и фундаментальную систему решений:

a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_4 = 0, \\ x_3 = 0. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

c) $\begin{cases} -6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ -8x_1 + 4x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$ *d)* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + -2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$ *f)* $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$

$$g)\ \begin{cases} x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_3 + 2x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases} \qquad h)\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + x_3 - x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_5 = 0. \end{cases}$$

3.7. Определить значения параметра a, при котором система уравнений имеет нетривиальное, тривиальное решение и найти эти решения для систем:

$$a)\ \begin{cases} ax_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0, \\ ax_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases} \qquad b)\ \begin{cases} -ax_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + ax_2 - ax_3 = 0. \end{cases}$$

4. Комплексные числа

4.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексным числом называют пару $z=(x,y)$ действительных чисел, для которых определены понятия равенства и операции сложения и умножения.

Комплексное число z задано в *алгебраической форме*, если оно имеет вид:

$$z=x+yi, \tag{4.1}$$

где x и y – действительные числа, мнимая единица i определяется условием $i^2=-1$. Число x называется действительной частью комплексного числа $z=x+yi$ и обозначается $x=\operatorname{Re}z$. Число y называется мнимой частью комплексного числа $z=x+yi$ и обозначается $y=\operatorname{Im}z$.

***Пример* 4.1.** Определить действительную и мнимую части комплексного числа $z=5+3i$.

Решение:

$$\operatorname{Re}(5+3i)=5,\ \operatorname{Im}(5+3i)=3.$$

Два комплексных числа $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$ называются равными, если равны их действительные и мнимые части, т.е. $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$.

Число $\bar{z}=x-yi$ называется *комплексно сопряженным* к комплексному числу $z=x+yi$. При нахождении комплексно сопряженного числа надо изменить знак мнимой части исходного числа.

***Пример* 4.2.** Определить комплексно сопряженные к следующим числам: $21+25i,\ -1-4i,\ 5,\ 7i,\ -9i,\ 3-8i.$

Решение:

$$\overline{25+25i}=25-25i,\quad \overline{-1-4i}=-1+4i,\quad \bar{5}=5,\quad \overline{7i}=-7i,\quad \overline{-9i}=9i,\quad \overline{3-8i}=3+8i.$$

4.2. Действия с комплексными числами

1. Сумма (разность) комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$

$$z_1\pm z_2=x_1\pm x_2+(y_1\pm y_2)i \tag{4.2}$$

2. Произведение комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$

$$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i. \tag{4.3}$$

3. Деление комплексных чисел $z_1=x_1+y_1i$ и $z_2=x_2+y_2i$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(x_1x_2+y_1y_2)+(x_2y_1-x_1y_2)i}{x_2^2+y_2^2}. \tag{4.4}$$

***Пример* 4.3.** Найти сумму и разность комплексных чисел $z_1 = 5 + 3i$ и $z_2 = 7 - 2i.$

Решение. Используя формулу (4.2), получим

$$z_1 + z_2 = 12 + i, \quad z_1 - z_2 = -2 + 5i.$$

***Пример* 4.4.** Найти произведение комплексных чисел $z_1 = 5 + 3i$ и $z_2 = 7 - 2i.$

Решение. При нахождении произведения можно воспользоваться формулой (4.3), учитывая, что $x_1 = 5, y_1 = 3, x_2 = 7, y_2 = -2.$

Можно раскрыть скобки и воспользоваться равенством $i^2 = -1,$ тогда

$$(5 + 3i) \cdot (7 - 2i) = 35 + 21i - 10i - 6i^2 = 35 + 11i - 6 \cdot (-1) = 41 + 11i.$$

***Пример* 4.5.** Найти результат деления комплексных чисел $z_1 = 5 + 3i$ и $z_2 = 7 - 2i.$

Решение. При делении можно воспользоваться формулой (4.4), учитывая, что $x_1 = 5, y_1 = 3, x_2 = 7, y_2 = -2.$

Можно умножить числитель и знаменатель дроби на сопряженное число $\bar{z}_2 = 7 + 2i,$ тогда

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(5+3i)(7+2i)}{(7-2i)(7+2i)} = \frac{29+31i}{49-4i^2} = \frac{29+31i}{53} = \frac{29}{53} + \frac{31}{53} i \, .$$

***Пример* 4.6.** Определить действительные корни уравнения:

$(2 - i)x + (-5 + 7i)y = 1 - 8i.$

Решение. Выделим в левой и правой частях уравнения действительную и мнимую части, для этого раскроем скобки и сгруппируем слагаемые:

$$(2 - i)x + (-5 + 7i)y = 2x - xi - 5y + 7yi = (2x - 5y) + (-x + 7y)i = 1 - 8i.$$

Приравниваем действительные и мнимые части, получаем систему уравнений: $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ -x + 7y = -8. \end{cases}$

Решаем эту систему, например, с помощью метода Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 5 = 9 \neq 0,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -8 & 7 \end{vmatrix} = 7 - 40 = -33, \ x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{33}{9} = -\frac{11}{3},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -8 \end{vmatrix} = -16+1==15,\ \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}.$$

Таким образом, $x = -\dfrac{11}{3}$, $y = -\dfrac{5}{3}$.

Комплексное число $z = x + 0i$ считается совпадающим с действительным числом *x*. Комплексные числа $z = yi$ называются *чисто мнимыми*.

При решении квадратных уравнений в случае отрицательного дискриминанта нужно воспользоваться равенством $i^2 = -1$.

***Пример* 4.7.** Решить квадратное уравнение $z^2 + 4z + 13 = 0$.

Решение. Вычислим дискриминант уравнения:

$D = b^2 - 4ac = 16 - 4\cdot 13 = -36 < 0,\ \sqrt{D} = \sqrt{-36} = 6i,$ тогда

$$z_1 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4-6i}{2} = -2-3i,\ \ z_2 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-4+6i}{2} = -2+3i.$$

***Пример* 4.8.** Решить систему уравнений: $\begin{cases} (1+i)x_1 + (2+i)x_2 = 1+16i, \\ (1+3i)x_1 + (1+2i)x_2 = -12+19i. \end{cases}$

Решение. Для решения системы используем метод Крамера, вычислим определители $\Delta = \begin{vmatrix} 1+i & 2+i \\ 1+3i & 1+2i \end{vmatrix} = (1+i)(1+2i) - (2+i)(1+3i) = -4i,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1+16i & 2+i \\ -12+19i & 1+2i \end{vmatrix} = (1+16i)(1+2i) - (2+i)(-12+19i) = 12-8i,$$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1+i & 1+16i \\ 1+3i & -12+19i \end{vmatrix} = (1+i)(-12+19i) - (1+16i)(1+3i) = 16-12i,$ тогда решение системы: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{12-8i}{-4i} = 2+3i,\quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{16-12i}{-4i} = 3+4i.$

Таким образом, решение системы $X = \begin{pmatrix} 2+3i \\ 3+4i \end{pmatrix}.$

Задачи

4.1. Вычислить:

a) $(1+2i)(2+3i)$; *b*) $\dfrac{1+2i}{1-i}$; *c*) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$; *d*) $\dfrac{(1+2i)^2}{4+3i}$; *e*) $\dfrac{3i-2}{2i-3}(1+i)$;

$f)\ \dfrac{4-3i}{5-4i}(1+2i);\ g)\ \dfrac{(1+3i)^2(3-2i)}{1+i};\ h)\ \dfrac{-2+i}{(1+2i)^2}+\dfrac{(4-2i)^2}{2+i}.$

4.2. Даны комплексные числа $z_1=-2+5i$ и $z_2=3-4i.$ Найти:

$$a)\ z_1+z_2;\ b)\ z_2-z_1;\ c)\ z_1z_2;\ d)\ \frac{z_1}{z_2}.$$

4.3. Найти сумму и произведение комплексных чисел:

$a)\ z_1=5+2\sqrt{6}i,\ z_2=5-2\sqrt{6}i;\ b)\ z_1=5-3i,\ \ z_2=-1+6i;$

$c)\ z_1=0,2+4i,\ z_2=-0,3-0,9i.$

4.4. Найти разность и частное комплексных чисел:

$a)\ z_1=2+2i,\ z_2=1-i;b)\ z_1=5-3i,\ z_2=-4+7i;c)\ z_1=a+\sqrt{b}i,\ z_2=a-\sqrt{b}i.$

4.5. Вычислить:

$$a)\ \frac{5i-2}{3i+1}+i+\frac{8i-3}{2-i};\quad b)\ \frac{3-2i}{1-4i}+i^9;\ \ c)\ 2i\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

4.6. Решить системы уравнений:

$$a)\ \begin{cases}2x-3y=-3+5i,\\4x+iy=5i+1\end{cases};\quad b)\ \begin{cases}(2+i)x+4iy=-7,\\-2ix+(1-i)y=1-i\end{cases};\quad c)\ \begin{cases}4ix+(1+3i)y=-3+3i,\\(5-i)x+3y=5i+4.\end{cases}$$

4.7. Решить уравнения:

$a)\ (2x+3y)+(x-y)i=7+6i;\quad b)\ (3+2i)x+(1+3i)y=4\text{-}9i;$

$c)\ (1+i)x+(2+3i)y=1+2i;\ \ d)\ (1-2i)x+(4-3i)y=6-7i;$

$e)\ (5-3i)x-(2+i)y=4-9i;\ \ f)\ (3-i)x-(4-7i)y=-7+25i.$

4.8. Решить уравнения:

$$a)\ x^2+9=0;\quad b)\ x^2-x+1=0;\quad c)\ x^4-6x^2+25=0.$$

4.9. Вычислить определитель:

$$a)\begin{vmatrix}a & c+di\\-c+di & b\end{vmatrix};\ \ b)\begin{vmatrix}a+bi & b\\2a & a-bi\end{vmatrix};\ \ c)\begin{vmatrix}1 & 0 & 1+i\\0 & 1 & i\\1-i & -i & 1\end{vmatrix}.$$

4.10. Для действительных чисел *a* и *в* решить уравнения:

$$a)\ z+2\overline{z}=3a+bi;\quad b)\ 2z-3\overline{z}=a+5bi.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.11. Представить комплексное число в алгебраической форме:

$$a)\frac{2}{1+i};\quad b)\frac{1+i}{2+i};\quad c)\frac{2-3i}{2+3i};\quad d)\frac{2+3i}{1+2i}.$$

4.12. Упростить выражения:

$$a)\frac{a+bi}{a-bi}+\frac{a-bi}{a+bi};\qquad b)\frac{a+bi}{a-bi}-\frac{a-bi}{a+bi}.$$

4.13. Вычислить:

$$a)\ (2+3i)(3-4i);\quad b)\ (13-i)(2i-3);\quad c)\ (1+i)(2-3i)+(2+3i)(1-i).$$

4.14. Решить систему линейных уравнений в комплексных числах:

$$a)\begin{cases}(3-i)x_1+(4+2i)x_2=1+3i,\\ (4+2i)x_1-(2+3i)x_2=7;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}(2+i)x_1+(3-i)x_2=2+6i,\\ (1+2i)x_1-(3-2i)x_2=-3;\end{cases}$$

$$c)\begin{cases}(2-i)x_1+(3-i)x_2=5+4i,\\ (1+2i)x_1+ix_2=-3+2i;\end{cases}\qquad d)\begin{cases}(1-i)x_1+(2-3i)x_2=6-4i,\\ (3+2i)x_1+(2+i)x_2=9+4i.\end{cases}$$

4.15. Решить систему линейных уравнений в комплексных числах:

$$a)\begin{cases}x_1+ix_2-2x_3=-5+2i,\\ x_1-x_2-2ix_3=-1-6i,\\ ix_1+3ix_2-(1+i)x_3=-3+4i;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}x_1+ix_2-2x_3=10,\\ x_1-x_2-2ix_3=-8-4i,\\ ix_1+3ix_2-(1+i)x_3=30.\end{cases}$$

4.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Каждому комплексному числу $z=x+yi$ поставим в соответствие точку с координатами (x,y) на координатной плоскости Oxy. Это геометрическая интерпретация комплексных чисел. Вектор $z=(x;y)$ называется радиус-вектором комплексного числа.

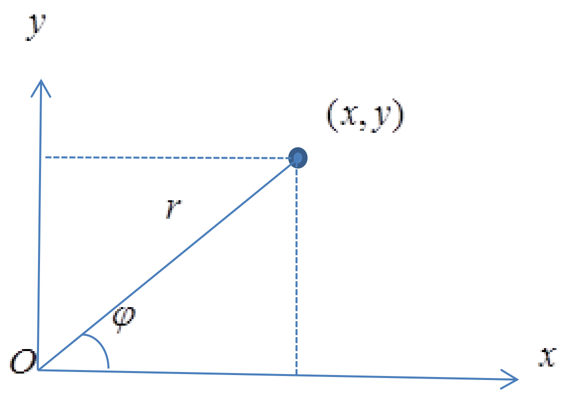


Рис. 1. Геометрическая интерпретация комплексного числа $z=x+yi$.

Число r называется модулем комплексного числа $z = x + yi$, обозначается $|z|$ и определяется по формуле $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Угол φ называется аргументом комплексного числа $z = x + yi$, обозначается $\arg z$ и определяется из условия $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$, причем $0 \le \arg z < 2\pi$.

Тригонометрическая форма комплексного числа $z = x + yi$ имеет вид:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{4.5}$$

где $\cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\quad \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

***Пример* 4.9.** Определить тригонометрическую форму комплексного числа $z = -1 - i$.

Решение. Поскольку $x = -1$, $y = -1$, то это комплексное число принадлежит третьей четверти, определим модуль $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2}$.

Из условия $tg\varphi = \dfrac{y}{x} = 1$ определим $\varphi = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4}$, подставляя найденные значения в формулу (4.5) получаем тригонометрическую форму $z = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$.

Пусть заданы комплексные числа в тригонометрической форме $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, то справедливы следующие свойства арифметических операций:

1. При сложении (вычитании) радиус-векторы комплексных чисел складываются (вычитаются) по правилу параллелограмма.
2. При произведении модули комплексных чисел перемножаются, а аргументы складываются $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.
3. При делении модули комплексных чисел делятся, а аргументы вычитаются $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.
4. При возведении комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в степень n используется формула Муавра $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$.
5. При нахождении корня $n-$й степени из комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ используется формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1,\dots,n-1.$$

***Пример* 4.10.** Найти произведение комплексных чисел

$$z_1 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) \text{ и } z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Решение:

$$z_1 \cdot z_2 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 12\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 12\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = 12\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -6\sqrt{3} - 6i.$$

***Пример* 4.11.** Найти результат деления чисел из примера 4.10.

Решение:

$$z_1 / z_2 = 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) / 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$

$$= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 3(0 + i) = 3i.$$

***Пример* 4.12.** Определить множество точек, удовлетворяющих условию $|z - 1 + 2i| < 2.$

Решение. Пусть $z = x + yi,$ тогда $z - 1 + 2i = x + yi - 1 + 2i = (x - 1) + (y + 2)i.$ Поэтому модуль $|z - 1 + 2i| = |(x - 1) + (y + 2)i| = \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} < 2,$ т.е. $(x-1)^2 + (y+2)^2 < 4.$ Это внутренность круга радиуса 2 с центром в точке $(1, -2)$, граница круга (окружность) не включается в искомое множество точек.

***Пример* 4.13.** Возвести комплексное число $z = -1 - i$ в степень $n = 5.$

Решение. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = -1 - i$ имеет вид $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ (см. пример 4.9). Тогда по формуле Муавра

$$z^5 = (\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{5\cdot 5\pi}{4} + i\sin\frac{5\cdot 5\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{25\pi}{4} + i\sin\frac{25\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right) +\right.$$

$$\left. + i\sin\left(6\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 + 4i.$$

***Пример* 4.14.** Определить корень 3-й степени из комплексного числа $z = -1 - i.$

Решение. Тригонометрическая форма комплексного числа $z=-1-i$ имеет вид $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ (см. пример 4.9). Тогда

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)\right),\quad k=0,1,2.$$

При $k=0$ получаем значение корня $z_0=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

При $k=1$ получаем значение корня $z_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{12}+i\sin\frac{3\pi}{12}\right)$.

При $k=2$ получаем значение корня $z_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{21\pi}{12}+i\sin\frac{21\pi}{12}\right)$.

4.4. Показательная форма комплексного числа

Комплексное число $z=x+yi$ можно представить в показательной форме $z=re^{i\varphi}$, где $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ – формула Эйлера.

Пусть заданы комплексные числа в показательной форме $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, то справедливы следующие свойства арифметических операций:

1. Произведение $z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;

2. Деление $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$;

3. Возведение в степень $z^n=r^ne^{i\varphi n}$;

4. Извлечение корня $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}e^{\frac{i\varphi}{n}}$.

***Пример* 4.15.** Вычислить $e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Решение. По формуле Эйлера получим $e^{i\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

***Пример* 4.16.** Определить показательную форму комплексного числа $z=-1-i$.

Решение. Так как модуль $r=\sqrt{2}$, а аргумент $\varphi=\frac{5\pi}{4}$ (см. пример 4.9), то показательная форма будет иметь вид $z=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Задачи

4.16. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

$a)\ z=16-16\sqrt{3}i;$ $\quad d)\ z=-6\sqrt{3}-6i;$ $\quad g)\ z=3-\sqrt{10};$

$b)\ z=-2+2i;$ $\quad e)\ z=-\sqrt{5}i;$ $\quad h)\ z=(\sqrt{5}-2)i$

$c)\ z=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i;$ $\quad f)\ z=10;$ $\quad i)\ z=\sin 36^\circ+i\cos 54^\circ.$

4.17. Найти комплексные корни квадратных уравнений:

$a)\ z^2-3z+(3+i)=0;$ $\quad b)\ z^2-5z+(7+i)=0;$ $\quad c)\ z^2-(2+i)z+7i=1;$

$d)\ z^2+(2i-3)z+5=5i.$

4.18. Выполнить действия:

$a)(1-\sqrt{3}i)\cdot(\cos\varphi-i\sin\varphi);$ $\quad b)\dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}};$ $\quad c)(1+\sqrt{3}i)\cdot(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdot(1+i);$

$d)\dfrac{(1-\sqrt{3}i)(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{\sqrt{2}(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}.$

4.19. Используя формулу Муавра вычислить:

$$a)(1+i)^{25};\quad b)(1-\sqrt{3}i)^{15};\quad c)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{20}.$$

4.20. Найти значения определителя, если $w=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}i$:

$$a)\begin{vmatrix}1 & w & w^2\\ w^2 & 1 & w\\ w & w^2 & 1\end{vmatrix};\quad b)\begin{vmatrix}1 & 1 & w\\ 1 & 1 & w^2\\ w^2 & w & 1\end{vmatrix};\quad c)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & w & w\\ 1 & w & w^2\end{vmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

4.21. Решить уравнения:

$$a)\,z^8=256;\quad b)\,z^3=27;\quad c)\,z^4=-14;\quad d)\,z^3=i.$$

4.22. Определить множество точек, удовлетворяющих условию:

$$a)|z-i|=1;\quad b)|z-i|\le 1;\quad c)|z-1|=|z-i|;\quad d)|z+1|=|z+i|=|z-i|.$$

4.23. Вычислить по формуле Муавра(Щипачев):

$$a)(1-i)^6;\quad b)(2+\sqrt{12}i)^5;\quad c)\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{12};\quad d)\left(\cos 10^\circ + i\sin 10^\circ\right)^{27}.$$

4.24. Найти все значения корней:

$$a)\sqrt[3]{-1+i};\quad b)\sqrt{-3-\sqrt{3}i};\quad c)\sqrt{1+i};\quad \sqrt[3]{i}.$$

4.25. Решить уравнения и сделать проверку:

$$a)x^2+25=0;\quad b)x^2-2x+2=0;\quad c)x^2-2x+5=0;\quad d)x^2+4x+13=0;$$

$$e)x^3-8=0;\quad f)x^4+4=0.$$

5. Собственные значения и собственные векторы матрицы

Число λ называется *собственным значением* квадратной матрицы A порядка n, если существует ненулевой вектор x, такой что выполняется условие

$$Ax = \lambda x. \tag{5.1}$$

Вектор x, удовлетворяющий условию (5.1) называется собственным вектором матрицы A, принадлежащим (соответствующим) ее собственному значению λ.

Соотношение (5.1) можно переписать в виде $(A - \lambda E)x = 0$, где E – единичная матрица порядка n. Таким образом, условие (5.1) представляет собой однородную систему уравнений. Поскольку решение системы – вектор $x \neq 0$, то $|A - \lambda E| = 0$, в противном случае система (5.1) имеет единственное тривиальное решение.

Таким образом, задача нахождения собственных значений и векторов свелась к решению уравнения

$$|A - \lambda E| = 0, \tag{5.2}$$

которое называется *характеристическим уравнением* матрицы A.

Корни этого характеристического уравнения (характеристические числа) и являются собственными значениями матрицы A.

Свойства собственных векторов:

1. Собственные векторы, соответствующие разным собственным значениям, линейно независимы.
2. Ненулевая линейная комбинация собственных векторов, соответствующих одному собственному значению, является собственным вектором, соответствующим тому же собственному значению.
3. Характеристическое уравнение матрицы порядка n имеет в общем случае n комплексных корней (с учетом их кратности). Поэтому собственные значения и векторы имеются у любой квадратной матрицы. Причем собственные значения определяются однозначно (с учетом их кратности), а собственные векторе – неоднозначно.
4. Совокупность всех собственных значений матрицы (с учетом их кратности) называется спектром матрицы и обозначается $\sigma(A)$.

Для нахождения собственных значений и векторов квадратной матрицы A необходимо выполнить следующие действия:

1. Составить характеристическое уравнение матрицы A.
2. Найти все корни характеристического уравнения – это и будут собственные значения матрицы A.
3. Для каждого собственного значения решить систему уравнений $(A - \lambda E)x = 0$, решения системы – собственные векторы матрицы A.

***Пример* 5.1.** Найти собственные значения матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2.$$

***Пример* 5.2.** Найти собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение. Для $\lambda_1 = -1$ составляем однородную систему уравнений $(A-\lambda_1 E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3,$$

задавая стандартные наборы переменных $x_2 = 1$ и $x_3 = 0$ получаем $x_1 = -1$, если $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$ получаем $x_1 = -1$, значит система имеет два решения $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, значит собственному значению $\lambda_1 = -1$ соответствует собственный вектор $x_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta -$произвольные постоянные не равные 0 одновременно.

Для $\lambda_2 = 2$ составляем однородную систему уравнений $(A-\lambda_2 E)x = 0$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$$

полагая $x_2 = x_3 = 1$, получаем $x_1 = 1$, значит собственному значению $\lambda_2 = 2$ соответствует собственный вектор $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

***Пример* 5.3.** Найти собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}1-\lambda & -4\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-2\lambda+5=0\Rightarrow \lambda_1=1-2i,\quad \lambda_2=1+2i.$$

Для $\lambda_1=1-2i$ составляем однородную систему уравнений $(A-\lambda_1 E)x=0$:

$$\begin{pmatrix}2i & -4\\ 1 & 2i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2ix_1-4x_2=0,\\ x_1+2ix_2=0.\end{cases}\Rightarrow x_1=-2ix_2,$$

полагая $x_2=1$, получаем $x_1=-2i$, значит собственному значению $\lambda_1=1-2i$ соответствует собственный вектор $x_1=\begin{pmatrix}-2i\\ 1\end{pmatrix}$.

Для $\lambda_2=1+2i$ составляем однородную систему уравнений $(A-\lambda_2 E)x=0$:

$$\begin{pmatrix}-2i & -4\\ 1 & -2i\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-2ix_1-4x_2=0,\\ x_1-2ix_2=0.\end{cases}\Rightarrow x_1=2ix_2,$$

полагая $x_2=1$, получаем $x_1=2i$, значит собственному значению $\lambda_2=1+2i$ соответствует собственный вектор $x_2=\begin{pmatrix}2i\\ 1\end{pmatrix}$.

Задачи

5.1. Найти собственные значения и собственные векторы матриц:

$$a)\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix};\quad c)\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix};\quad d)\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix};\quad e)\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix};$$

$$f)\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ -4 & 1 & 3\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix};\quad g)\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 3 & -3 & 1\\ 3 & -3 & 1\end{pmatrix};\quad h)\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix};\quad i)\begin{pmatrix}-4 & -6 & 0\\ 3 & 5 & 0\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix};$$

$$j)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad k)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad l)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

5.2. Показать, что вектор $x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ является собственным вектором матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\5 & -3 & 3\\-1 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

5.3. Найти матрицу A, для которой вектор $x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ является собственным вектором, принадлежащем собственному значению $\lambda=-2$.

5.4. Определить, является ли матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix}0{,}9 & 0{,}7\\0{,}2 & 0{,}2\end{pmatrix}$ в модели Леонтьева продуктивной, используя второй критерий.

6. Квадратичные формы

6.1. Стандартный вид квадратичной формы

Квадратичной формой $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от n неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется сумма, каждое слагаемое которой является или квадратом одного из неизвестных или произведением двух разных неизвестных.

***Пример* 6.1.** $F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2^2 - 2x_3x_1$ – квадратичная форма от трех неизвестных x_1, x_2, x_3.

Обычно используются квадратичные формы стандартного вида

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = a_{11}x_1x_1 + a_{12}x_1x_2 + \cdots + a_{1n}x_1x_n +$$

$$+ a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2x_2 + \cdots + a_{2n}x_2x_n + \cdots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \cdots + a_{nn}x_nx_n.$$

Матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ называется матрицей квадратичной формы, она является симметричной так как $a_{ij} = a_{ji}, i, j = \overline{1, n}$.

Квадратичную форму можно записать в матричном виде

$$F(X) = X^t AX,$$

где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\quad X^t = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Квадратичные формы вполне определяются своими матрицами.

***Пример* 6.2.** Квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 15x_3^2$$

записать в стандартном и матричном виде.

Решение. Квадратичная форма в стандартном виде

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1x_1 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 + 2x_2x_1 + 5x_2x_2 + 5x_2x_3 + 3x_3x_1 + 5x_3x_2 + 15x_3x_3,$$

в матричном виде

$$F(X) = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 15 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

6.2. Преобразование квадратичной формы при невырожденном линейном преобразовании координат

Пусть преобразование координат имеет вид $X = CY,$ где

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец старых переменных},$$

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец новых переменных},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix} - \text{матрица преобразования координат.}$$

Это преобразование координат является линейным, так как представляет собой систему линейных уравнений.

Преобразование координат называется невырожденным, если матрица преобразования C невырожденная.

Квадратичная форма $F(X) = X^t AX$ в новой системе координат имеет вид

$$F(Y) = (CY)^t A(CY) = Y^t C^t ACY = Y^t A^\wedge Y,$$

где $A^\wedge = C^t AC$ – матрица квадратичной формы в новой системе координат.

Пример **6.3.** Квадратичную форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 15x_3^2$$

записать в новой системе координат, если преобразование координат задано системой уравнений $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 + y_3, \\ x_2 = y_2 + y_3, \\ x_3 = y_3. \end{cases}$

Решение. Матрица преобразования координат $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, тогда матрица квадратичной формы в новой системе координат имеет вид

$$A^{\wedge}=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&3\\2&5&5\\3&5&15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3&6\\3&10&18\\6&18&41\end{pmatrix}.$$

Запишем квадратичную форму в новой системе координат

$$F(Y)=Y^t A^{\wedge} Y=(y_1,y_2,y_3)\cdot\begin{pmatrix}1&3&6\\3&10&18\\6&18&41\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}=$$

$$=y_1^2+6y_1y_2+12y_1y_3+10y_2^2+36y_2y_3+41y_3^2.$$

6.3. Канонический вид квадратичной формы

Квадратичная форма, не содержащая членов с произведением различных переменных и имеющая диагональную матрицу, называется канонической.

Всякая квадратичная форма при помощи невырожденного линейного преобразования приводится к каноническому виду

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2,$$

где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ – собственные значения матрицы A квадратичной формы.

***Пример* 6.4.** Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$F(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3.$$

Решение. Матрица A квадратичной формы имеет вид $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$.

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix}2-\lambda&-2&0\\-2&1-\lambda&-2\\0&-2&-\lambda\end{vmatrix}=0.$

Тогда $-\lambda^3+3\lambda^2+6\lambda-8=0\Rightarrow\lambda_1=-2,\lambda_2=1,\lambda_3=4$ и канонический вид квадратичной формы будет

$$F(x_1,x_2,x_3)=-2y_1^2+y_2^2+4y_3^2.$$

6.4. Знакоопределенность квадратичной формы

Квадратичная форма $F(X)=X^t AX$ называется положительно определенной, если при любых действительных значениях переменных, не всех равных 0, $F(X)>0.$

Если при тех же условиях $F(X)<0,$ то квадратичная форма называется отрицательно определенной.

***Пример* 6.5.** $x_1^2 + x_2^2$ – положительно определенная квадратичная форма, $-x_1^2 - x_2^2$ – отрицательно определенная квадратичная форма.

Критерий Сильвестра. Для того чтобы квадратичная форма $F(X) = X^t AX$ была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства для главных миноров

$$|A_1| = a_{11} > 0, |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, |A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Следствие. Чтобы квадратичная форма была отрицательно определенной, необходимо и достаточно выполнение неравенств для главных миноров

$$|A_1| = a_{11} < 0, |A_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^n |A_n| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

***Пример* 6.6**. При каких значениях параметра λ квадратичная форма $F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$ будет положительно определенной.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$,

вычислим главные миноры

$$|A_1| = 5 > 0,\ |A_2| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ |A_3| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda - 2 > 0 \Rightarrow \lambda > 2.$$

Задачи

6.1. Квадратичную форму записать в стандартном и матричном виде

$a) F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 2x_2x_3;$

$b) F(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3;$

$c) F(x_1, x_2, x_3) = -6x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 12x_2x_3;$

$d) F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$

$f) F(x_1, x_2, x_3) = 17x_1^2 + 417x_2^2 + 11x_3^2 - 16x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$

6.2. Привести к каноническому виду квадратичные формы:

$a) F(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3;$

$b) F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3;$

$c) F(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3;$

$e) F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

6.3. Найти все значения параметра λ, при котором положительно определены квадратичные формы:

$a) F(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$

$b) F(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4\lambda x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3;$

$c) F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3.$

6.4. Найти все значения параметра λ, при котором отрицательно определены квадратичные формы:

$a) F(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + \lambda x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$

$b) F(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3;$

$c) F(x_1, x_2, x_3) = 2\lambda x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$

Образцы контрольных и расчетно-графических работ

Контрольная работа № 1

(действия с векторами и матрицами)

1. Найти вектор x из уравнения $y+2z-w+x=0,$ если $y=(-7;2;4;0)$, $z=(11;5;-2;0)$ и $w=(1;9;2;4)$.

2. Даны векторы $a=(-7;2;4;0)$ и $b=(11;5;-2;0)$. Найти векторы: $5a+3b,$ $3a-4b,$ $4(3a+2b)-3a+6b+5(a-b)$.

3. Найти значения параметра $a,$ при которых векторы $x^1=(-1;1;2),$ $x^2=(5;5;a),$ $x^3=(3;-2;1)$ линейно зависимы.

4. В токарном цехе работают 20 рабочих, известно, что на обработку одной детали пятеро из них тратят по 42 мин., 8 – по 50 мин, остальные – по 60 мин. Используя скалярное произведение векторов, найти общее время, затраченное рабочими на обработку одной детали.

5. Найти угол между векторами x и y, если

$$\langle x-y, x-y\rangle+\langle 2x-y, 2x-y\rangle=56,\ \|x\|=2, \|y\|=3.$$

6. Вычислить $0{,}0125(A^t\cdot B\cdot C^t)$, если $A=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&2\\3&2&1\end{pmatrix}, C=(3;2;1).$

7. Найти вектор $x=(x_1,x_2)$, если $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35\\48\end{pmatrix}.$

8. Найти (где это возможно) BC, CB^T, ACB^T, CA, если

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\-3&5\end{pmatrix},\ B=(6;1;-4),\ C=\begin{pmatrix}2&1&-4\\0&3&-2\end{pmatrix}.$$

9. Вычислить A^2-2B, если $A=\begin{pmatrix}4&1&2\\1&1&5\\3&0&-2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&3&5\\0&4&1\\-2&1&3\end{pmatrix}.$

10. Предприятие выпускает продукцию четырех видов, используя два вида сырья. Норма расхода сырья на единицу продукции задается матрицей $A=\begin{pmatrix}5&7&9&2\\3&1&6&7\end{pmatrix}$. Стоимость единицы сырья вида задается вектором $B=(22;43)$. Определить общие затраты предприятия на производство 100 ед. продукции 1-го вида, 300 – 2-го, 200 – 3-го и 500 – 4-го вида.

Контрольная работа № 2

(вычисление определителей, обратной матрицы,
решение матричных уравнений, модель Леонтьева)

1. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Является ли матрица B обратной к матрице A, если $A=\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 10 & 7 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$?

3. Определить, является ли матрица прямых затрат $A=\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}6 \end{pmatrix}$ в модели Леонтьева продуктивной?

4. По известной матрице прямых затрат $A=\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ и вектору валового продукта $x=\begin{pmatrix} 300 \\ 300 \end{pmatrix}$ в модели Леонтьева найти вектор конечного спроса y.

5. Решить матричное уравнение

$$X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Контрольная работа № 3

(вычисление ранга, решение систем уравнений)

1. Решить систему линейных уравнений тремя способами:
a) методом Гаусса;
b) методом обратной матрицы;
c) методом Крамера;

$$\begin{cases} 2x_1 - 7x_2 + x_3 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 17, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3. \end{cases}$$

2. Найти ранг матрицы и указать максимальное число линейно независимых строк

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 2 & -1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Три бригады обработали три участка поля. Площади участков и затраты времени на их обработку представлены в таблице.

Участок	Время работы бригады, ч			Площадь участка, га
	A	*B*	*C*	
1	5	3	1	70
2	2	3	4	100
3	1	5	5	130

a) Записать математическую модель задачи.

b) Найти производительность каждой бригады.

c) Рассчитать суммарную выручку бригад, если их почасовая оплата составляет соответственно P = (150; 200; 250) р.

Контрольная работа № 4

(решение произвольных, однородных систем)

1. Решить систему уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 - x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_4 = 1. \end{cases}$$

2. Исследовать совместность и найти общее решение системы

$$\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 14, \\ -2x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = -13, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 6x_4 = -12. \end{cases}$$

3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Контрольная работа № 5

(комплексные числа, собственные значения и векторы, квадратичные формы)

1. Вычислить $\sqrt[4]{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}$.

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} (i-5)x_1 + 2ix_2 = -28 - 10i \\ 8x_1 - (3+2i)x_2 = 15i + 57 \end{cases}$.

3. Представить в тригонометрической форме $z = 3 + 2i$.

4. Найти собственные значения и векторы матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}$.

5. Записать квадратичную форму $2x_4^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_2x_4$ в стандартном виде, найти ее матрицу и исследовать на знакоопределенность.

Расчетно-графическая работа

Задача 1. Анализ прибыли и затрат

Фирма выпускает 5 видов продукции *A1, A2, A3, A4, A5* из четырех видов сырья *R1*, *R2*, *R3*, *R4*, удельные затраты одной единицы сырья на одну единицу изделия приведены в таблице (матрица *A*).

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	*A5*
R1	12	0	0	0	10
R2	19	14	5	1	0
R3	0	3	13	20	1
R4	16	12	0	4	17

Планируемый выпуск продукции составляет *X* = (50; 10; 20; 55; 90) ед. соответственно.

Стоимость одной единицы сырья *C* = (8; 16; 14; 5) р. соответственно.

Предполагаемая цена продажи одной единицы продукции *P* = (530; 380; 300; 350; 240) р. соответственно.

1) Найти:

a) количество сырья, необходимого для производства планируемого количества продукции (AX^T);

b) суммарные затраты на приобретение ресурсов (*CA*, затем $(CA)X^T$);

c) суммарную прибыль от продажи продукции в заданных условиях (Р – (*CA*)), затем $(P - (CA))X^T$).

2) Как изменится планируемая прибыль, если:

a) приобрести ресурсы у другого поставщика по цене C_1 = (6; 14; 17; 6);

b) изменится план выпуска X_1 = (60; 25; 40; 65; 80) ед. при первоначальной стоимости ресурсов.

Задача 2. Планирование производства

Фирма выпускает 5 видов продукции *A1, A2, A3, A4, A5* из пяти видов сырья *R1*, *R2*, *R3*, *R4*, *R5*. Расход сырья на 1 ед. продукции, а также запасы ресурсов приведены в таблице (матрица *A*).

	A1	*A2*	*A3*	*A4*	*A5*	Запасы ресурсов
R1	11	11	5	21	0	4 545
R2	4	0	18	7	10	3 190
R3	0	5	0	16	5	2 470
R4	22	23	8	0	8	4 430
R5	15	0	11	19	7	5 025

1. Записать математическую модель задачи.
2. Найти количество продукции, которое можно произвести в заданных условиях.
3. Рассчитать суммарную выручку от продажи продукции, если цена за 1 ед. соответственно равна *P* = (700; 650; 500; 300; 450) р.

Задача 3. Модель Леонтьева «затраты-выпуск»

Имеются данные по четырем отраслям экономики.

1. Составить математическую модель, описывающую баланс между отраслями экономики. 2. Найти: *a)* матрицу прямых затрат; *b)* матрицу (*E* – *A*); *c)* матрицу полных затрат; *d)* определить продуктивность модели по обоим критериям; *e)* вычислить, как изменится объем валового выпуска, если конечный спрос составит 130, 60, 350, 150, 180, 220 ед.

Отрасль экономики	Потребление внутри отраслей						Конечное потребление *C*	Валовой продукт *X*
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6		
P_1	100	90	40	100	10	100	110	450
P_2	145	55	105	55	115	125	55	530
P_3	50	15	90	110	10	140	325	600
P_4	65	20	115	100	40	30	140	480
P_5	20	15	80	15	125	80	165	420
P_6	25	130	90	50	100	90	205	600

Ответы

1. Векторная алгебра

1.1. *a*) $(1;4;-7;7)$; *b*) $(4;\ 6;-35;\ -1)$; *c*) $(70;\ 40;-20;-16)$; *d*) $(51;\ 26;\ 18{,}5;\ -11{,}5)$. **1.2.** *a*) $(-0{,}5;1;3;3)$; *b*) $(-17;\ -13;\ 41;\ 5)$; *c*) $\left(-\frac{8}{3};-\frac{7}{3};-\frac{16}{3};-\frac{11}{3}\right)$; *d*) $\left(-\frac{23}{4};-\frac{29}{8};\frac{27}{8};\frac{9}{8}\right)$. **1.3.** *a*) линейно независимы; *b*) линейно зависимы; *c*) линейно независимы. **1.4.** При $a=5$. **1.5.** $\alpha=\frac{2\pi}{3}$. **1.6.** $1+3\sqrt{3}$. **1.7.** $\alpha=\frac{\pi}{3}$. **1.8.** Вкладчик получит через год 95 тыс. р. **1.9.** 1 600. **1.10.** При $a=-\frac{5}{3}$, $a=\frac{6}{5}$. **1.11.** $u+v-4w=(-3;15)$; $3y=(0;3;3)$; $2v=(0;2)$; $u+2v=(1;4)$; $u-v=(1;1)$; $3x+y=(3;7;1)$; $-2x=(-2;-4;0)$. **1.12.** $x=\pm 2$. **1.13.** 1. **1.14.** $x=\pm 5$. **1.15.** $x=\left(-2;\frac{13}{4};-\frac{5}{4};-\frac{3}{2}\right)$. **1.16.** $x=(1;\ 2;\ 3;4)$. **1.17.** $x=\frac{3}{5}$. **1.18.** *a*) 9; *b*) 52. **1.19.** *a*) 2; *b*) 10; *b*) 98; *d*) 102. **1.20.** *a*) $\sqrt{3}$; *b*) $\sqrt{90}$; *c*) $\sqrt{11}$; *d*) $\sqrt{19}$. **1.21.** $\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. **1.22.** $\lambda=1$. **1.23.** *a*) $x=-3$; *b*) $x=\frac{20}{3}$. **1.24.** $\sqrt{3}$, $11\sqrt{3}$. **1.25.** Расход сырья $S=470$ кг, затраты рабочего времени $T=810$ ч., стоимость выпускаемой продукции P = 2 970 ден. ед. **1.26.** Расход сырья S = 1 280 кг, затраты рабочего времени T = 5 290 ч., стоимость выпускаемой продукции P = 2 160 000 р. **1.27.** 121 млрд р. **1.28.** Фирме необходимо выпускать продукцию $П_4$ в количестве не менее 9 ед. **1.29.** Затраты на единицу продукции $П_1$ должны быть менее 20 дол. **1.30.** 3 дол.

2. Матричная алгебра

2.1. $A_{2\times3}$, $B_{3\times1}$, $C_{3\times3}$. $a_{12}=-3$, $a_{22}=-5$, $a_{23}=4$, $b_{11}=4$, $b_{31}=5$, $c_{13}=2$, $c_{31}=6$, $c_{33}=-1$. **2.2.** $a=3$, $b=1$, $c=8$, $d=-2$. **2.3.** $a=0$, $b=2$, $c=1$, $d=2$. **2.4.** 1. *a*) $C+E=E+C=\begin{pmatrix}5&-5&8\\4&2&9\\5&3&4\end{pmatrix}$; *b*) решений нет; *c*) $\begin{pmatrix}7&-7\\0&1\end{pmatrix}$;

d) $\begin{pmatrix}-9&3&-9\\-12&-3&-15\\-6&-3&-9\end{pmatrix}$; *e*) $\begin{pmatrix}0&10&-9\\8&-1&-2\\-5&-4&3\end{pmatrix}$; *f*) решений нет. 2. *a*) $\begin{pmatrix}1&4\\10&18\end{pmatrix}$;

b) $3(2A)=6A=\begin{pmatrix}6&12&18\\12&6&24\end{pmatrix}$; *c*) $2A+3A=5A=\begin{pmatrix}5&10&15\\10&5&20\end{pmatrix}$;

d) $2(D+F)=2D+2F=\begin{pmatrix}-2 & 6\\ 8 & 14\end{pmatrix}$; *e*) $(2+3)D=2D+3D=\begin{pmatrix}15 & -10\\ 10 & 20\end{pmatrix}$;

f) решений нет. 3. *a*) $A^T=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $\left(A^T\right)^T=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}$;

b) $\left(C+E\right)^T=C^T+E^T=\begin{pmatrix}5 & 4 & 5\\ -5 & 2 & 3\\ 8 & 9 & 4\end{pmatrix}$; *c*) $\begin{pmatrix}-6 & 10\\ 11 & 17\end{pmatrix}$; *d*) $\begin{pmatrix}0 & -4\\ 4 & 0\end{pmatrix}$; *e*) $\begin{pmatrix}3 & 4\\ 6 & 3\\ 9 & 10\end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix}17 & 2\\ -16 & 6\end{pmatrix}$. 4. *a*) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ 4 & 2\\ 6 & 8\end{pmatrix}$; *b*) решений нет; *c*) решений нет; *d*) решений нет.

2.5. *a*) $\begin{pmatrix}1 & -18\\ -21 & 1\end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix}2 & 2 & -5\\ 7 & 4 & -5\\ 0 & -10 & -3\end{pmatrix}$. **2.6.** $\begin{pmatrix}1 & -3\\ -13 & -17\\ 3 & -7\end{pmatrix}$. **2.7.** *d*) $\begin{pmatrix}10 & 5 & 0\\ 26 & 17 & 0\end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix}16 & 7 & 0\\ 24 & 13 & 0\end{pmatrix}$; *i*) $\begin{pmatrix}10 & 26\\ 5 & 17\\ 0 & 0\end{pmatrix}$. **2.8.** $x=\dfrac{6}{5}$, $y=\dfrac{12}{5}$. **2.9.** 10. **2.10.** *a*) $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$;

b) $\begin{pmatrix}1 & 5 & -5\\ 3 & 10 & 0\\ 2 & 9 & -7\end{pmatrix}$; *c*) $\begin{pmatrix}11 & -22 & 29\\ 9 & -27 & 32\\ 13 & -17 & 26\end{pmatrix}$; *d*) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. **2.11.** $X=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

2.12. *a*) $A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 5\\ 6 & 3 & 13\end{pmatrix}$; *b*) $B\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 3 & 3\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$; *c*) $B\cdot A=A=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$;

d) $A\cdot B=\begin{pmatrix}29 & -22\\ 31 & -24\end{pmatrix}$, $B\cdot A=\begin{pmatrix}5 & 2\\ 7 & 0\end{pmatrix}$. **2.13.** *a*) $\begin{pmatrix}13 & -14\\ 21 & -22\end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix}304 & -61\\ 305 & -62\end{pmatrix}$.

2.14. *a*) $\begin{pmatrix}-7 & -2 & 1\\ 8 & 1 & -5\\ 1 & -1 & -4\end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3\end{pmatrix}$; *c*) $\begin{pmatrix}-8 & 0 & 0\\ -5 & 25 & 100\\ -13 & 25 & 100\end{pmatrix}$.

2.15. $\begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 625\end{pmatrix}$. **2.16.** $\begin{pmatrix}6 & -1 & -13\\ 6 & -7 & -26\\ -7 & 1 & 0\end{pmatrix}$. **2.17.** *a*) $\begin{pmatrix}14 & 8\\ 16 & 9\end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix}7 & 10 & -2\\ 19 & 6 & 31\end{pmatrix}$;

c) решений нет; *d*) $\begin{pmatrix} 19 & -6 \\ 30 & 21 \end{pmatrix}$. **2.18.** *a*) Указание: имеют смысл следующие произведения матриц $A\cdot F$, $B\cdot A$, $B\cdot D$, $C\cdot E$, $D\cdot C$, $D\cdot E$; *c*) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 70 \\ 49 & -16 & 119 \\ 21 & 0 & 12 \end{pmatrix}$.

2.19. *a*) $\begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 34 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **2.20.** $\begin{pmatrix} 1220 & 730 & 770 & 496 \\ 1470 & 1036 & 1315 & 894 \\ 720 & 1122 & 952 & 1110 \end{pmatrix}$.

2.21. $\begin{pmatrix} 82 & 44 & 55 & 150 \\ 63 & 77 & 39 & 62 \\ 36 & 160 & 120 & 135 \end{pmatrix}$. **2.22.** $\begin{pmatrix} 70 & 130 & 10 \\ 30 & 340 & 200 \\ -40 & 710 & 10 \end{pmatrix}$. $\begin{pmatrix} 485 & 845 & 215 \\ 1065 & 410 & 190 \\ 1480 & 475 & 595 \end{pmatrix}$.

2.23. *a*) $\begin{pmatrix} 102 & 204 & 81 & 144 & 116 \end{pmatrix}$; *b*) $\begin{pmatrix} 184 & 161 & 160 \end{pmatrix}$; *c*) 3607.

2.24. *b*) $\begin{pmatrix} 49 & 12 & 26 \\ 24 & 12 & 32 \\ 41 & 12 & 22 \\ 21 & 12 & 23 \end{pmatrix}$. **2.25.** *a*) матрица $A(3\times 2)$ – прибыль от продаж по оптовой и розничным ценам в каждом магазине; *b*) $A(1\times 5)$ – количество продаваемых компьютеров каждой модели во всех магазинах; *c*) $A(1\times 2)$ – суммарный доход от продаж по оптовым и рыночным ценам. **2.26.** Первый способ производства дает за единицу времени прибыль на 428 р. больше чем второй. **2.27.** *a*) объемы продукции за полугодие определяются суммой матриц $A+B$; *b*) $B-A$; *c*) $(A+B)\cdot C$. **2.28.** $P\cdot A\cdot C=27$ ден. ед. **2.29.** (1 000; 3 300; 1 000; 1 900). Наиболее выгоден для реализации товара второй регион (максимальная выручка от реализации – 3 300). **2.30.** Первое сырье расходуется в количестве 850 кг, второе – 870 кг, третье – 920 кг. **2.31.** *a*) $X\cdot A^T=(57;\ 114;\ 54;\ 63;\ 98)$; *b*) 1384 ден. ед. **2.32.** *a*) 11; *b*) –5; *c*) 1; *d*) 3; *e*) 2. **2.33.** $x=-2{,}2$. **2.34.** *a*) 0; *b*) 1; *c*) 8; *d*) –27; *e*) 29. **2.35.** *a*) $t_1=t_2=1$; *b*) $x_1=0,\ x_2=1$; *c*) $x_1=2,\ x_2=3$. **2.36.** *a*) $x>3{,}5$; *b*) $(-6;-4)$. **2.37.** $|A|=81$. **2.38.** $M_{23}=-21,\ M_{14}=-29,\ M_{34}=-10,$ $A_{32}=80,\ A_{43}=-13,\ A_{24}=-21$. **2.39.** $2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+6\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$. **2.40.** *a*) $(-2;4)$; *b*) $(-\infty;2]$. **2.41.** *a*) 8; *b*) -150; *c*) -10; *d*) –3; *e*) 2; *f*) 120; g) 0; *h*) 0; *i*) –7120. **2.42.** $x=\{-2;-1;\ 1;\ \pi k,\ k\in Z\}$. **2.43.** $x=\{0{,}25;\ 64\}$. **2.44.** $c=502$. **2.45.** $0\le|A|\le 4$.

2.46. *a*) 306; *b*) 1. **2.47.** *a*) $x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; *b*) $x=\pm\sqrt{2}$; *c*) 1; *d*) $x\in R$. **2.48.** *a*) $x\in R$; *b*) решений нет. **2.49.** Матрица *c*), т.к. $\Delta=6$; матрица *d*), так как $\Delta=3$.

2.50. *a*) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & -\frac{3}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$; *b*) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}$; *c*) $A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$;

d) $A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0\\ -\frac{3}{5} & \frac{12}{5} & 2\\ -\frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 1\end{pmatrix}$. **2.51.** Обратная матрица существует при всех значениях α, кроме $\alpha=\frac{9}{4}$. **2.52.** Обратная матрица не существует при $\alpha=-3$.

2.54. *a*) $X=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; *b*) $X=\begin{pmatrix}6 & 4 & 5\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$; *c*) $X=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$. *d*) $X=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

2.55. $B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0\\ -6 & 8 & 2\\ 4 & 0 & 5\end{pmatrix}$. **2.56.** 6. **2.57.** 44. **2.58.** $X=\begin{pmatrix}42 & 34 & -40\\ 12 & 9 & -11\\ -4 & -3 & 4\end{pmatrix}$. **2.59.** Решений нет. **2.60.** *a*) $X=\begin{pmatrix}8 & -9 & -3\\ -3 & 4 & 1\end{pmatrix}$; *b*) $X=\begin{pmatrix}18 & -13\\ 9 & -6\\ -10 & 8\end{pmatrix}$; *c*) $X=\begin{pmatrix}-7 & -13\\ -10 & -19\end{pmatrix}$;

d) $X=\begin{pmatrix}-16 & 38 & -6\\ 30 & -69 & 12\\ 16 & -55 & 1\end{pmatrix}$. **2.61.** *a*) да; *b*) нет. **2.62.** Решений нет. **2.63.** Для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2 %, уровень энергетики – на 35,8 % и выпуск продукции машиностроения – на 85 % по сравнению с исходными величинами, указанными в табл. **2.64.** Валовая продукция $X=\begin{pmatrix}482\\ 250\end{pmatrix}$. **2.65.** Матрица прямых затрат не продуктивна. **2.66.** Матрица прямых затрат продуктивна, $x=\begin{pmatrix}59{,}2743\\ 80{,}6037\\ 68{,}9695\end{pmatrix}$.

2.67. *a*) $x=\begin{pmatrix}100\\40\end{pmatrix}$; *b*) 10 %, 55%. **2.68.** $x=\begin{pmatrix}105\frac{20}{31}\\147\frac{18}{31}\\118\frac{17}{31}\end{pmatrix}$.

2.69. $x=\left(1{,}0849\cdot10^5;\quad 2{,}0089\cdot10^5\right)$. **2.70.** *a*) $x=\begin{pmatrix}1304{,}341\\606{,}0888\\1134{,}6432\end{pmatrix}$;

b) $x=\begin{pmatrix}1166{,}3619\\1157{,}6432\\1153{,}7008\end{pmatrix}$; *c*) $x=\begin{pmatrix}1649{,}78\\899{,}7669\\1695{,}5381\end{pmatrix}$. **2.71.** *a*) $r(A)=3$; *b*) $r(A)=3$;

c) $r(A)=3$; *d*) $r(A)=2$; *e*) $r(A)=2$. **2.72.** *D*, *A*, *C*, *B*. **2.73.** 1. **2.74.** При $p=3$ ранг принимает минимальное значение $r(A)=3$. **2.75.** $r(A)=1$, если $a=1$; $r(A)=2$, если $a=-2$; $r(A)=3$, если $a\neq1$ и $a\neq-2$. **2.76.** *a*) $r(A)=2$; *b*) $r(A)=3$; *c*) $r(A)=3$; *d*) $r(A)=2$. **2.77.** *a*) При $\lambda=1$ $r(A)=1$, при $\lambda\neq1$ $r(A)=4$; *b*) При $\lambda=\pm3$ $r(A)=3$, при $\lambda\neq\pm3$ $r(A)=4$. **2.78.** *a*) 2; *b*) 3. **2.79.** При $p=\frac{1}{3}$ $r(A)=3$. При $\lambda=0$ $r(A)=2$. **2.80.** При $\lambda=0$ $r(A)=2$.

3. Системы линейных алгебраических уравнений

3.1. *a*) $X=\begin{pmatrix}0{,}125\\-0{,}75\\1\end{pmatrix}$; *b*) $X=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$; *c*) $X=\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$; *d*) $X=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$; *e*) $X=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$;

f) $X=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$. **3.2.** $X=\begin{pmatrix}50/12\\10/12\\190/12\end{pmatrix}$. **3.3.** $X=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}$. **3.4.** $X=\begin{pmatrix}10\\5\\10\end{pmatrix}$. **3.5.** *a*) $X=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$;

b) $X=\begin{pmatrix}5\\4\\3\end{pmatrix}$; *c*) $X=\begin{pmatrix}6\\0\\-1\end{pmatrix}$; *d*) $X=\begin{pmatrix}0\\-1\\5\end{pmatrix}$; *e*) $X=\begin{pmatrix}4\\0\\2\end{pmatrix}$; *f*) $X=\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix}$.

3.6. *b*) $X=\begin{pmatrix}10\\20\\5\end{pmatrix}$; *c*) 7300. **3.7.** *a*) $X=\begin{pmatrix}4\\8\end{pmatrix}$; *b*) $X=\begin{pmatrix}6{,}8\\11{,}2\end{pmatrix}$. **3.8.** *a*) $X=\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}$;

$b)\ X=\begin{pmatrix}-0{,}2\\0{,}8\\2{,}2\end{pmatrix};\ c)\ X=\begin{pmatrix}3\\-4\\0\end{pmatrix};\ d)\ X=\begin{pmatrix}-1\\-4\\6\end{pmatrix};\ e)\ X=\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix};\ f)\ X=\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}.$

3.9. $X=\begin{pmatrix}100\\40\\80\end{pmatrix}$. **3.10.** $X=\begin{pmatrix}444\\1888\\222\end{pmatrix}$. **3.11.** $X=\begin{pmatrix}700\\800\\300\end{pmatrix}$. **3.12.** $a)\ X=\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix};$

$b)\ X=\begin{pmatrix}1{,}5\\0\\-0{,}5\end{pmatrix};\ c)\ X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\ d)\ X=\begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix};\ e)\ X=\begin{pmatrix}-5\\-3\\9\end{pmatrix};\ f)\ X=\begin{pmatrix}1\\-2\\0\end{pmatrix}.$

3.13. $X=\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}$. **3.14.** $X=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}$. **3.15.** $a)\ X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix};\ b)\ X=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix};$ $c)$ система несовместна; $d)\ X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}1+0{,}8C_1+0{,}2C_2\\2+0{,}4C_1+0{,}6C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix};\ e)\ X=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix};\ f)\ X=\begin{pmatrix}10\\5\\7\end{pmatrix};\ g)\ X=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix};$

$h)\ X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\\\frac{7}{18}+\frac{2}{3}C_1+\frac{1}{18}C_2\\\frac{1}{6}-\frac{5}{6}C_2\end{pmatrix};\ i)\ X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}C_1-\frac{9}{11}C_2\\\frac{10}{11}-\frac{5}{11}C_1+\frac{1}{11}C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}.$

3.16. $X=\begin{pmatrix}7\\10\\13\end{pmatrix}$. **3.17.** $X=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$. **3.18.** $X=\begin{pmatrix}15\\20\\10\end{pmatrix}$. **3.19.** $X=\begin{pmatrix}1000\\2000\end{pmatrix}$. **3.20.** $a)\ X=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\\2\end{pmatrix};$

$b)\ X=\begin{pmatrix}0\\2\\1/3\\-1{,}5\end{pmatrix};\ c)\ X=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix};\ d)\ X=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix};$ $e)$ система несовместна;

f) $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}2-0{,}25C_1-2{,}25C_2\\-1{,}25C_1-0{,}25C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$; *g*) $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\\C_2\\13\\19-3C_1-2C_2\\-34\end{pmatrix}$;

h) $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}17+2C_1-15C_2\\-3-C_1+3C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$. **3.21.** $X=\begin{pmatrix}90\\15\\60\end{pmatrix}$. **3.22.** $X=\begin{pmatrix}100\\100\\200\\1000\end{pmatrix}$.

3.23. *a*) $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}2+C_1-2C_2\\1-2C_1-C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$; *b*) $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}-\frac{2}{11}+\frac{1}{11}C_1-\frac{9}{11}C_2\\\frac{10}{11}-\frac{5}{11}C_1+\frac{1}{11}C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$;

c) $X=\begin{pmatrix}0{,}875\\1{,}25\\0{,}875\end{pmatrix}$; *d*) $X=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; *e*) $X=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}$; *f*) $X(C_1,C_2,C_3)=\begin{pmatrix}1+C_3\\1+C_1+C_2-5C_3\\C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix}$.

3.25. Если $\alpha=-16,$ то система несовместна; если $\alpha\neq-16,$ то система имеет единственное решение $X(\alpha)=\begin{pmatrix}\frac{2\alpha+7}{\alpha+16}\\\frac{\alpha+1}{\alpha+16}\\\frac{5}{-\alpha-16}\end{pmatrix}$. **3.26.** *b*) $X=\begin{pmatrix}0\\0\\4\\2\end{pmatrix}$.

3.27. *a*) $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}1--3C_1+5C_2\\3+4C_1-7C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$; *b*) $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}1+5C_1-C_2\\1-1{,}5C_1-2C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$;

c) $X(C)=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{8}C\\0\\-\frac{11}{8}C\\C\end{pmatrix}$; *d*) система несовместна; *e*) $X=\begin{pmatrix}10\\5\\7\end{pmatrix}$; *f*) $X=\begin{pmatrix}-3\\2\\5\end{pmatrix}$.

3.28. *a*) Если $a=-2,$ то система несовместна; если $a\neq 1, a\neq -2,$ то система имеет единственное решение $X(a)=\begin{pmatrix}\frac{1}{a+1}\\\frac{1}{a+1}\\\frac{1}{a+1}\end{pmatrix}$; если $a=1,$ то система имеет общее решение $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}1-C_1-C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$; *b*) Если $a\neq 0, a=-3,$ то система имеет единственное решение $X(a)=\begin{pmatrix}\frac{2-a^2}{a(a+3)}\\\frac{2a-1}{a(a+3)}\\\frac{a^3+2a^2-a-1}{a(a+3)}\end{pmatrix}$; если $a=0, a=-3,$ то система несовместна. **3.29.** $X(C)=\begin{pmatrix}C\\5-3C\\12{,}5-0{,}5C\\C\end{pmatrix}$. **3.30.** $X=\begin{pmatrix}4\\1\\4\\1\end{pmatrix}$.

3.31. *a*) $X(C)=\begin{pmatrix}-C\\-C\\C\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

b) $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}-C_1-4C_2\\-0{,}5C_1-1{,}5C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}, E_1=\begin{pmatrix}-1\\-0{,}5\\1\\0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}-4\\-1{,}5\\0\\1\end{pmatrix}$;

$c)\ X(C)=\begin{pmatrix}C\\C\\0\\C\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix};\ d)\ X(C)=\begin{pmatrix}C\\-\frac{1}{7}C\\-\frac{5}{7}C\\0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1\\-\frac{1}{7}\\-\frac{5}{7}\\0\end{pmatrix};$

$e)\ X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\\\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{7}C_2\\-\frac{5}{7}C_2\\C_2\end{pmatrix},\ E_1=\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\\0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{7}\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix};\ f)\ X=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix};$

$g)\ X(C_1,C_2,C_3)=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}C_1-\frac{1}{3}C_2+\frac{1}{3}C_3\\-\frac{1}{3}C_1+\frac{2}{3}C_2+\frac{1}{3}C_3\\C_1\\C_2\\C_3\end{pmatrix},E_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{1}{3}\\1\\0\\0\end{pmatrix},E_2=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\0\\1\\0\end{pmatrix},\ \ E_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\0\\0\\1\end{pmatrix}.$

3.32. *a*) Если $a=2,$ то $X(C)=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}C\\0\\C\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix};$ если $a=-4,$ то

$X(C)=\begin{pmatrix}-1{,}25C\\6C\\C\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}-1{,}25\\6\\1\end{pmatrix};$ *b*) Если $a=-1,$ то $X(C)=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}C\\\frac{1}{3}C\\C\end{pmatrix},E=\begin{pmatrix}-\frac{5}{3}\\\frac{1}{3}\\1\end{pmatrix}.$

3.33. *a*) $X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}-2C_1-4C_2\\C_1\\0\\C_2\end{pmatrix},E_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\0\\1\end{pmatrix};$

$b)\ X(C)=\begin{pmatrix}0{,}6C\\0{,}2C\\C\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}0{,}6\\0{,}2\\1\end{pmatrix};$ $c)\quad X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\\2C_1-\frac{3}{7}C_2\\-\frac{5}{7}C_2\\C_2\end{pmatrix},\ E_1=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{3}{7}\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix};$

$d)\ X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}8C_1-7C_2\\-6C_1+5C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix},\ E_1=\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix};$

$e)\ X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\\\frac{1}{2}C_1-\frac{1}{7}C_2\\-\frac{5}{7}C_2\\C_2\end{pmatrix},\ E_1=\begin{pmatrix}1\\0{,}5\\0\\0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{7}\\-\frac{5}{7}\\1\end{pmatrix};$

$f)\ X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}8C_1-7C_2\\-6C_1+5C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix},\ E_1=\begin{pmatrix}8\\-6\\1\\0\end{pmatrix},\ E_2=\begin{pmatrix}-7\\5\\0\\1\end{pmatrix};$

$g)\ X(C_1,C_2)=\begin{pmatrix}C_1\\2C_1-C_2\\-C_1+C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}, E_1=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\1\\0\end{pmatrix}, E_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\\1\end{pmatrix};$ $h)\ X(C)=\begin{pmatrix}-6C\\2C\\-5C\\-21C\\C\end{pmatrix}, E=\begin{pmatrix}-6\\2\\-5\\-21\\1\end{pmatrix}.$

3.34. $a)$ Если $a=0$, то $X(C)=\begin{pmatrix}1{,}25C\\-0{,}5C\\C\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1{,}25\\-0{,}5\\1\end{pmatrix};$ $b)$ Если $a=-2$, то $X(C)=\begin{pmatrix}-0{,}8C\\-0{,}2C\\C\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}-0{,}8\\-0{,}2\\1\end{pmatrix};$ если $a=3$, то $X(C)=\begin{pmatrix}C\\-C\\0\end{pmatrix},\ E=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$

4. Комплексные числа

4.1. *a*) $-4+7i$; *b*) $-0{,}5+1{,}5i$; *c*) $0{,}8+0{,}6i$; *d*) i; *e*) $\frac{17}{13}+\frac{7}{13}i$; *f*) $\frac{30}{41}+\frac{65}{41}i$; *g*) $11+23i$; *h*) $2-8{,}6i$. **4.2.** *a*) $1+i$; *b*) $5-9i$; *c*) $14+23i$; *d*) $-\frac{26}{25}+\frac{7}{25}i$. **4.3.** *a*) 10 и 49; *b*) $4+3i$ и $13+33i$; *c*) $-0{,}1+3{,}1i$ и $3{,}54-1{,}38i$. **4.4.** *a*) $2+3i$ и $2i$; *b*) $9-10i$ и $-\frac{41}{65}-\frac{23}{65}i$; *c*) $2\sqrt{b}i$ и $\frac{a^2-b}{a^2+b}+\frac{2a\sqrt{b}}{a^2+b}i$. **4.5.** *a*) $-1{,}5+4{,}7i$; *b*) $-\frac{6}{17}+\frac{10}{17}i$; *c*) $2i$. **4.6.** *a*) $X=\begin{pmatrix} i \\ 1-i \end{pmatrix}$; *b*) $X=\begin{pmatrix} 2-i \\ 3i \end{pmatrix}$; *c*) $X=\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. **4.7.** *a*) $X=\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$; *b*) $X=\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$; *c*) $X=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; *d*) $X=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; *e*) $X=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; *f*) $X=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. **4.8.** *a*) $\pm 3i$; *b*) $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$; *c*) $\pm\sqrt{3\pm 4i}$. **4.9.** *a*) $ab-c^2-d^2$; *b*) $(a-b)^2$; *c*) -2. **4.10.** *a*) $z=a-bi$; *b*) $z=-a+bi$. **4.11.** *a*) $1-i$; *b*) $0{,}6+0{,}2i$; *c*) $-\frac{5}{13}-\frac{12}{13}i$; *d*) $\frac{8}{5}-\frac{1}{5}i$. **4.12.** *a*) $\frac{2(a^2-b^2)}{a^2+b^2}$; *b*) $\frac{4abi}{a^2+b^2}$. **4.13.** *a*) $18+i$; *b*) $-37+29i$; *c*) 10. **4.14.** *a*) $X=\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$; *b*) $X=\begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix}$; *c*) $X=\begin{pmatrix} i \\ 1+i \end{pmatrix}$; *d*) $X=\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \end{pmatrix}$. **4.15.** *a*) $X=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; *b*) $X=\begin{pmatrix} 3-11i \\ -3-9i \\ 1-7i \end{pmatrix}$.

4.16. *a*) $32\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ и $32e^{\frac{5\pi}{3}i}$; *b*) $\sqrt{8}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ и $\sqrt{8}e^{\frac{3\pi}{4}i}$;

c) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ и $3e^{\frac{\pi}{6}i}$; *d*) $12\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ и $12e^{\frac{7\pi}{6}i}$;

e) $\sqrt{5}\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ и $\sqrt{5}e^{\frac{3\pi}{2}i}$; *f*) $10(\cos 0+i\sin 0)$ и $10e^{0i}$;

g) $(3-\sqrt{10})(\cos\pi+i\sin\pi)$ и $(3-\sqrt{10})e^{\pi i}$; *h*) $(\sqrt{5}-2)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$ и $(\sqrt{5}-2)e^{\frac{\pi}{2}i}$; *i*) $\sqrt{2}\sin 36^\circ\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ и $\sqrt{2}\sin 36^\circ e^{\frac{\pi}{4}i}$. **4.17.** *a*) $1+i$ и $2-i$; *b*) $2+i$ и $3-i$; *c*) $-1+2i$ и $3-i$; *d*) $2+i$ и $1-3i$.

4.18. *a*) $2\left(\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right)$; *b*) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$;

c) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\varphi\right)\right)$; *d*) $\cos\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(2\varphi-\frac{\pi}{12}\right)$.

4.19. *a*) $4096(1+i)$; *b*) -2^{15}; *c*) $512(1-\sqrt{3}i)$. **4.20.** *a*) 0; *b*) -3; *c*) $\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$.

4.21. *a*) $z_0=2$, $z_1=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_2=2i$, $z_3=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z_4=-2$, $z_5=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$, $z_6=-2i$, $z_7=\sqrt{2}-\sqrt{2}i$; *b*) $z_0=3$, $z_1=-\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_2=-\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}i$;

c) $z_0=\sqrt[4]{14}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, $z_1=\sqrt[4]{14}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$, $z_2=\sqrt[4]{14}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$,

$z_3=\sqrt[4]{14}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$; *d*) $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$, $z_2=-i$. **4.22.** *a*) окружность с центром $(0;1)$ и $R=1$; *b*) круг с центром $(0;1)$ и $R=1$; *c*) серединный перпендикуляр к отрезку; *d*) центр окружности, описанной около треугольника. **4.23.** *a*) $8i$; *b*) $512(1-\sqrt{3}i)$; *c*) 1; *d*) $-i$.

4.24. *a*) $\sqrt[6]{2}(\cos\varphi+i\sin\varphi), \varphi=45^\circ, 165^\circ, 285^\circ$;

b) $\sqrt[4]{12}\left[\cos\left(-\frac{5}{12}\pi+k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{5}{12}\pi+k\pi\right)\right], k=0,1$;

c) $\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right)\right], k=0,1$; *d*) $-i$. **4.25.** *a*) $\pm 5i$; *b*) $1\pm i$;

c) $1\pm 2i$; *d*) $-2\pm 3i$; *e*) $x_1=2, x_{2,3}=-1\pm\sqrt{3}i$; *f*) $x_{1,2}=-1\pm i$, $x_{3,4}=1\pm i$.

5. Собственные значения и собственные векторы

5.1. *a*) $\lambda_1=2 \quad x_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$, $\lambda_2=3 \quad x_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$; *b*) $\lambda=1 \quad x=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$;

c) $\lambda_1=1 \quad x_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\lambda_2=-2 \quad x_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$; *d*) $\lambda=2 \quad x=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

e) $\lambda_1=0 \quad x_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\lambda_2=1 \quad x_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$; *f*) $\lambda=1 \quad x=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$;

$g)\ \lambda_1 = 0 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$

$h)\ \lambda_1 = -2 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = 1 \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

$i)\ \lambda_1 = 2 \quad x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

$j)\ \lambda_1 = 0 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};$

$k)\ \lambda_1 = 0 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$

$l)\ \lambda_1 = 0 \quad x_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 1 \quad x_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = 2 \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

5.3. $A = \begin{pmatrix} -2-2C_1-3C_2 & C_1 & C_2 \\ -4-2C_3-3C_4 & C_3 & C_4 \\ -6-2C_5-3C_6 & C_5 & C_6 \end{pmatrix}$. **5.4.** Не является продуктивной.

6. Квадратичные формы

6.2. *a*) $F = y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_3^2$; *b*) $F = 2y_1^2 - y_2^2 + 5y_3^2$; *c*) $F = 6y_1^2 + 3y_2^2 + 9y_3^2$.
6.3. *a*) $\lambda > 0$; *b*) требуемых значений λ не существует; *c*) $0 < \lambda < 0{,}8$.
6.4. *a*) $\lambda > -1{,}75$; *b*) $\lambda < -2$; *c*) требуемых значений λ не существует.

Список использованной литературы

1. Леонова О. В. Математика. Курс лекций: учеб. пособие для студентов очной и заочной форм обучения направления 43.03.02 Туристский и гостиничный бизнес / О. В. Леонова, Н. П. Шерстянкина; БГУ. - Иркутск: Изд-во БГУ, 2018. - 154 с.

2. Анапольский Л.Ю. Сборник задач по математике в экономике. Ч. 2: Линейная алгебра. Функции нескольких переменных / Л.Ю. Анапольский, С.И. Никулина. – Иркутск : Изд-во ИГЭА, 2001. – 142 с.

3. Дыхта В.А. Линейная алгебра и экономические модели : учеб. пособие / В.А. Дыхта. – Сер. Основы математики для экономистов. – Вып. 6. – Иркутск : Изд-во ИГЭА, 1997. – 233 с.

4. Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов: задачи, тесты, упражнения : учеб. пособие для бакалавров / В.Л. Клюшин. – 5-е изд., перераб. и доп. – М. : Юрайт, 2013. – 165 с. – Сер.: Бакалавр. Базовый курс.

5. Малугин В.А. Математика для экономистов: Математический анализ. Задачи и упражнения / В.А. Малугин. – М. : Эксмо, 2006. – 288с. – (Высшее экономическое образование).

6. Малугин В.А. Линейная алгебра : учеб. пособие / В.А. Малугин. – М. : Рид Групп, 2011. – 464 с. – (Национальное экономическое образование).

7. Дыхта В.А. Математическая экономика: начальные понятия, модели, задачи : учеб. пособие / В.А. Дыхта, А.Р. Городкова, Л.С. Калашникова и др. ; науч. ред. и авт. предисл. В.А. Дыхта. – Иркутск : Изд-во ИГЭА, 1995. – 174 с.

8. Миронов В.Л. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учеб. пособие / В.Л. Миронов. – М. : Изд-во «Дело» АНХ, 2008. – 192 с.

9. Никифоров В.А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В.А. Никифоров, Б.В. Шкода. – М. : Кн. дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 160 с.

10. Просветов Г.И. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: Задачи и решения : учеб-практ. пособие / Г.И. Просветов. – 2-е изд., доп. – М. : «Альфа-Пресс», 2009. – 208 с.

11. Сборник задач по высшей математике для экономистов : учеб. пособие / под ред. В.И. Ермаковой. – 2-е изд., испр. – М. : ИНФРА-М., 2009. – 575 с. – (Высшее экономическое образование).

12. Пчелинцев С.В. Сборник задач по курсу «Математика в экономике» : учеб. пособие : в 3 ч. / С.В. Пчелинцев, В.А. Бабайцев, А.С. Солодовников и др. ; под ред. В.А. Бабайцева, В.Б. Гисина. – М. : Финансы и статистика : ИНФРА-М, 2010. – Ч. 1: Линейная алгебра, аналитическая геометрия и линейное программирование. – 256 с.

13. Сидоренко Г.В. Линейная алгебра и линейные экономические модели : учеб. пособие / Г.В. Сидоренко. – Иркутск : Изд-во БГУЭП, 2009. – 180 с.

14. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике : учеб. пособие / В.С. Шипачев. – 4-е изд., стереотип. – М. : Высш. шк., 2004. – 304 с. : ил.

15. Kenneth Kuttler. Linear Algebra, Theory and Applications / Kuttler Kenneth. – Textbook Equity LLC Publication, 2013. – 500 p.

16. Sheldon Axler. Linear Algebra. Done Right. Third edition / Axler Sheldon. – Springer ; New York, 2015. – 261 p.

Учебное издание

Леонова Ольга Васильевна
Сорокина Полина Геннадьевна

МАТЕМАТИКА
(Линейная алгебра)

Учебное пособие

Издается в авторской редакции

Подписано в пользование 19.02.19.

Издательство Байкальского государственного университета.
664003, г. Иркутск, ул. Ленина, 11.

http://bgu.ru.